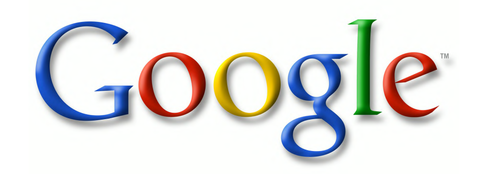
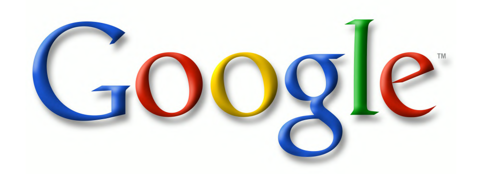
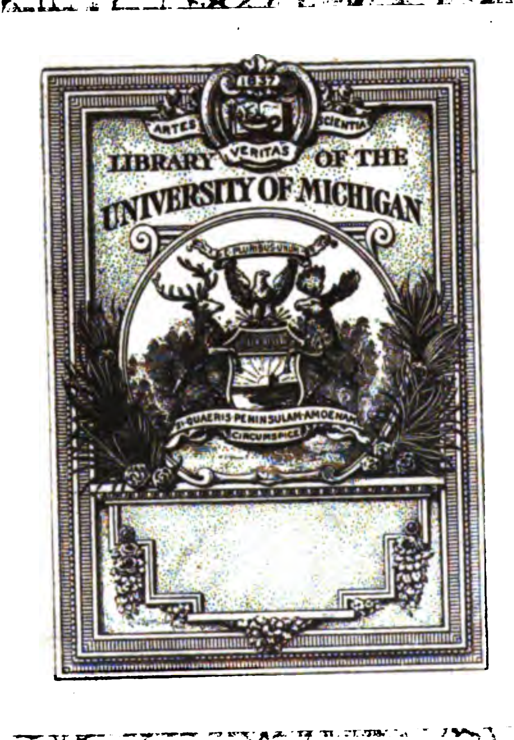
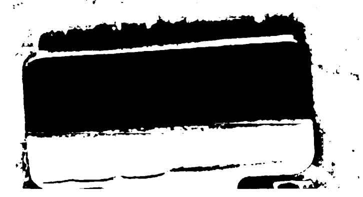





UNIV.
OF
MICH.



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Erster Teil.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1898.



Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Erster Teil.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Juli 1897 durch W. Schur.

Einleitung.

1. Die Zahl der Entdeckungen kleiner Planeten hat sich in den letzten Jahren ausserordentlich vermehrt, seitdem die von Herrn Max Wolf eingeführte photographische Methode Anwendung gefunden hat, und es wird heutzutage solchen Neuentdeckungen weit weniger Interesse entgegengebracht als in früheren Zeiten, wo dieselben noch verhältnissmässig selten waren. Die grosse Anzahl der bereits bekannten kleinen Planeten beginnt vielmehr die Astronomen in Verlegenheit zu setzen, da es immer schwieriger wird, den Bewegungen dieser vielen Himmelskörper rechnerisch zu folgen. Aus diesem Grunde hat man sogar davon sprechen hören, dass man den Planetenentdeckern anheim geben wolle, ihre Entdeckungen während einer längeren Zeit möglichst einzuschränken, um den Rechnern Gelegenheit zu geben, die Bahnen der bereits bekannten kleinen Planeten genauer festzulegen, ohne sie durch weitere Entdeckungen mit Rechnungsmaterial zu überhäufen.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass es sehr verfehlt wäre, diesen Planetenentdeckungen Einhalt thun zu wollen; denn eine jede Beobachtung kann für die Zukunft von grosser Wichtigkeit werden, wenn sie auch im Augenblicke wertlos erscheint, und wir müssen sicherlich danach streben, unsere Kenntniss des Sonnensystems möglichst zu vervollkommnen. Wenn man Zweifel aussprechen hört an dem Werte der genannten Entdeckungen, so ist dies nur ein Anzeichen dafür, dass die Rechnung mit der Beobachtung nicht mehr gleichen Schritt halten kann. Dies hat aber seinen Grund nicht allein in der grossen Menge der neuentdeckten Planeten, sondern es sind thatsächlich die Fortschritte auf dem Gebiete der praktischen Störungsrechnung hinter denen der beobachtenden Astronomie zurückgeblieben, trotzdem auf dem Gebiete der Theorie, hauptsächlich in Schweden

und in Frankreich, die letzte Zeit eine grosse Reihe hervorragender Arbeiten zu verzeichnen hat. Doch haben bei der Complicirtheit des Problems die theoretischen Erfolge noch immer nicht rechte Früchte tragen können für die rechnende Astronomie.

Es erscheint daher als eine sehr dringliche Aufgabe, Methoden aufzustellen, mittels deren man den Bewegungen der zahlreichen kleinen Planeten rechnerisch folgen kann. Man wird von vornherein darauf verzichten müssen, die Coordinaten aller dieser Himmelskörper mit derselben Genauigkeit durch die Rechnung darzustellen, mit der man den Bewegungen der grossen Planeten folgt, denn das Arbeitsmaterial würde zu gross werden. Nur diejenigen der kleinen Planeten, die aus irgend einem Grunde ein specielleres Interesse verdienen, wird man mit aller erreichbaren Schärfe berechnen.

Es bieten sich demnach der rechnenden Astronomie in bezug auf die kleinen Planeten die folgenden beiden Aufgaben:

I. Ihre Coordinaten soweit genähert zu berechnen, dass man sie ohne Schwierigkeiten nach einem gewissen Zeitraum am Himmel wieder auffinden und die neuen Planeten von den bereits bekannten leicht unterscheiden kann.

II. Ihre Coordinaten innerhalb der Beobachtungsfehler darzustellen, wenn es sich um die Bestimmung irgend einer der Constanten unseres Sonnensystems oder um Fragen der Mechanik oder der Cosmogonie handelt.

Bei Bearbeitung der ersteren Aufgabe können offenbar die auszuführenden Störungsrechnungen sehr erheblich abgekürzt werden. Herr Berberich, dem die astronomische Welt für seine mühevolle Arbeit der Identificirung des grössten Teils der in den letzten Jahren neu beobachteten Planeten verpflichtet ist, hat gezeigt, dass man mit Hilfe der Photographie einen Planeten nach mehreren Jahren wieder auffinden kann, ohne überhaupt Störungen zu rechnen, indem man die elliptische Bewegung zu Grunde legt. Es wird indessen angezeigter sein, die Störungen soweit zu bestimmen, dass man den Planeten nach einem Zeitraum von 50 bis 100 Jahren mit dem Fernrohr ohne besondere Schwierigkeit wieder findet.

Die Pariser Académie des Sciences hatte für den Prix Damoiseau für das Jahr 1894 folgende Aufgabe gestellt:

„Perfectionner les méthodes de calcul des perturbations des petites planètes en se bornant à représenter leur position, à quelques minutes d'arc près, dans un intervalle de cinquante ans; construire ensuite des tables numériques permettant de déterminer rapidement les parties principales des perturbations".

Es ist dies die erste der beiden eben genannten Aufgaben, mit der wir uns im Folgenden in erster Linie beschäftigen werden, und es ist die vorliegende Abhandlung im Wesentlichen eine weitere Ausarbeitung einer von der Akademie mit dem Preise gekrönten kürzeren Arbeit. Ich will aber die Grenzen noch etwas enger ziehen und versuchen, die geocentrischen Coordinaten der Planeten während eines Jahrhunderts im Allgemeinen innerhalb der Bogenminute darzustellen; und ferner will ich den Entwicklungen eine solche Allgemeinheit

geben, dass sie auch zur Lösung der zweiten Aufgabe als Grundlage dienen können.

Bei Bearbeitung der ersteren Aufgabe wird man Jupiter allein als störenden Körper berücksichtigen (wenn man einige vereinzelte kleine Planeten ausschliesst, welche von Seiten des Mars[1]) oder Saturns beträchtliche Störungen erleiden), und zwar wird man die Bewegung Jupiters als elliptisch ansehen.

Im zweiten Falle muss man ausser dem Einflusse Jupiters auch noch die anderen störenden Körper einführen, und man wird auch die wahre Bewegung der störenden Körper betrachten müssen, wie sie aus ihrer gegenseitigen Anziehung folgt.

Ich werde versuchen, beiden Aufgaben gerecht zu werden, indem ich mich einerseits auf die Betrachtung eines einzigen störenden Körpers (Jupiters) beschränke, da die Berücksichtigung mehrerer störender Körper keinen wesentlichen Unterschied in den Entwicklungen bedingt. Andererseits aber werde ich die Bewegung Jupiters, um die Allgemeinheit des Problems zu wahren, nicht von vornherein als elliptisch ansehen, sondern ich werde seine wahre Bewegung in die Entwicklungen einführen. Im weiteren Verlaufe sollen dann mit Rücksicht auf die erstere Aufgabe bedeutende Vereinfachungen vorgenommen werden, dadurch, dass ich die Bewegung Jupiters in die elliptische übergehen lasse.

2. Unsere Entwicklungen und Annäherungen werden nach Potenzen von gewissen Constanten fortschreiten, die den Excentricitäten und Neigungen in der elliptischen Bewegung analog, aber unabhängig von der störenden Masse sind; und zwar wird zunächst die Störungsfunktion nach Potenzen dieser Grössen entwickelt werden. Ich will jedes Glied, welches die n-te Potenz oder ein entsprechendes Produkt dieser Grössen als Faktor enthält, ein **Glied n-ten Grades** nennen, und bei der Entwicklung der Störungsfunktion die Glieder dritten Grades zunächst vernachlässigen. Bei der weitaus grössten Mehrzahl der kleinen Planeten wird diese Genauigkeit ausreichend sein, um ihre Coordinaten innerhalb der in der ersten Aufgabe gegebenen Grenzen darzustellen. Nur für diejenigen Planeten, deren Excentricität oder Neigung einen aussergewöhnlich hohen Betrag erreicht, ebenso wie für diejenigen, deren mittlere Bewegung sehr nahe in einem commensurablen niedrigzahligen Verhältniss zur mittleren Bewegung Jupiters steht, wird man eine weniger scharfe Darstellung erreichen. Doch wird es nicht schwierig sein, in diesen Fällen einige wichtigen Glieder dritten und vierten Grades nachzutragen. Ich werde demnach in den Differentialgleichungen für die Coordinaten des gestörten Körpers die Glieder dritten Grades (welche sämmtlich mit der störenden Masse multiplicirt sind) bei Seite lassen; dagegen werde ich in den Integralen (oder richtiger Lösungen) dieser Gleichungen, d. h. in den Ausdrücken für die Coordinaten, nicht durchweg alle Glieder höheren als zweiten Grades vernachlässigen; denn aus Gliedern, welche in den

1) Vgl. H. Lemke, Ueber die Mars- und Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hebe-Typus. Inaugural-Dissertation, Berlin 1897.



Differentialgleichungen niederen als dritten Grades sind, können in den Integralen beträchtliche Glieder vom dritten und von höheren Graden durch den Integrationsprocess (Kapitel VI—VII) entstehen, namentlich, wenn die mittlere Bewegung des betreffenden Planeten sehr nahe in einem commensurablen Verhältniss zu derjenigen Jupiters steht.

3. Die Excentricitäten und Neigungen in der elliptischen Bewegung, nach deren Potenzen die Entwicklungen in den älteren Störungstheorieen fortschreiten, enthalten implicit die störende Masse; die Entwicklungen nach ihren Potenzen enthalten also schon implicit eine Entwicklung nach den Potenzen der störenden Masse, was bei uns nicht der Fall ist. Ausserdem wird auch in den älteren Theorieen im Allgemeinen nach den Potenzen der explicit auftretenden störenden Masse entwickelt. Diese Entwicklungen sind nun in vielen Fällen unbedingt divergent, wie von Gyldén und anderen gezeigt worden ist. Wir werden darum nicht in jedem Falle unsere Entwicklungen und Annäherungen nach den Potenzen der störenden Masse ordnen; dennoch will ich, der Uebersichtlichkeit halber, ein jedes Glied, das die n-te Potenz der störenden Masse enthält, als Glied **n-ter Ordnung** bezeichnen. Man kann in dieser Beziehung die Planeten in zwei Gruppen teilen:

I. Solche Planeten, deren mittlere Bewegung so beschaffen ist, dass ihr Verhältniss zu derjenigen Jupiters keinem (niedrigzahligen) Bruche sehr nahe kommt; in diesem Falle können die Annäherungen unbedenklich nach den Potenzen der störenden Masse geordnet werden; ich will diese Planeten **gewöhnliche** nennen.

II. Diejenigen Planeten, deren mittlere Bewegung sehr nahe commensurabel mit derjenigen Jupiters ist; wir nennen sie nach einer von Gyldén eingeführten Bezeichnungsweise **charakteristische** Planeten. Hier führen die Entwicklungen nach den Potenzen der störenden Masse langsam oder garnicht zum Ziele; ich werde daher bei diesen Planeten die wichtigen Störungsglieder höherer Ordnungen schon in der ersten Annäherung berücksichtigen. Diejenigen unter den charakteristischen Planeten, welche einem commensurablen Verhältniss in bezug auf die mittleren Bewegungen besonders nahe kommen, d. h. näher kommen als eine gewisse später zu bezeichnende untere Grenze, nenne ich **kritische** Planeten (in gewisser Analogie mit Gyldén's kritischen Gliedern); unter ihnen sind diejenigen einbegriffen, welche jene Form der Bewegung zeigen, die man Libration genannt hat. Ob indessen im Systeme der kleinen Planeten wirklich Fälle von Libration vorkommen, kann erst nach Abschluss der auszuführenden Rechnungen entschieden werden.

4. Die Methode, welche ich anwende, hat als Grundlage die Untersuchungen, welche Gyldén in seiner schönen Theorie der absoluten Bahnen gegeben hat, und ich habe den Störungen im Wesentlichen dieselbe Form gegeben wie er. Gyldén hat sich allerdings als Hauptziel eine Darstellung der Planetenbewegungen gesetzt, welche für einen unbegrenzten Zeitraum giltig sein und es daher auch erlauben soll, über die Stabilität des Systems zu entscheiden; wir

wollen uns vorläufig nur vornehmen, die Coordinaten des gestörten Körpers während eines beschränkten, wenn auch ziemlich langen Zeitraums (eines Jahrhunderts) darzustellen, und deshalb können wir uns viele Umänderungen und Vereinfachungen gestatten, die zwar die unbeschränkte Convergenz unseres Verfahrens in Frage stellen, aber für die praktische Rechnung von bedeutendem Vorteil sind.

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass unsere Methode auch für die charakteristischen und kritischen Planeten anwendbar ist, und dass sie es auch ermöglicht, die Fälle zu behandeln, in denen Libration stattfindet. Das Hauptprincip ist die strenge Anordnung der Annäherungen nach dem Grade der Glieder, nicht aber nach den Potenzen der störenden Masse. Die Grundzüge unserer Methode finden sich bereits in einer in schwedischer Sprache erschienenen Abhandlung [1]) und in meiner Dissertation [2]), wenn sie auch seitdem recht erhebliche Vereinfachungen erfahren hat. Ich will indessen hier eine vollständige Darstellung geben, und es vermeiden, den Leser auf die genannten Arbeiten zu verweisen.

5. Die unabhängige Veränderliche, welche ich nach dem Vorgange Gyldén's anwende, ist nicht die Zeit, sondern die wahre Länge des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene, die mit v bezeichnet wird. Ich habe mich überzeugt, dass dies Verfahren sehr bedeutende Vorteile mit sich bringt. Schon in der elliptischen Bewegung drückt man den Radiusvektor als Funktion der Länge aus; denn wenn man ihn als explicite Funktion der Zeit darstellen will, so erhält man einen sehr complicirten Ausdruck, der sich nur durch eine unendliche Reihe geben lässt, die nach Potenzen der Excentricität fortschreitet; führt man nun aber in die Differentialgleichung des Radiusvektors in der gestörten Bewegung die Zeit als unabhängige Veränderliche ein [3]), so erhält man in dieser Gleichung eine ebensolche unendliche Reihe, welche nach den Potenzen der Excentricität fortschreitet, und deren Glieder nicht mit der störenden Masse multiplicirt sind; vernachlässigt man dann, von einer gewissen Potenz der Excentricität an, die Glieder dieser Reihe, so vernachlässigt man Glieder, die man sonst in der ungestörten Bewegung berücksichtigt; wenn auch bei geringen Excentricitäten diese Glieder sehr klein sein können, so bringt doch ein solches Verfahren erhebliche Nachteile mit sich. In den älteren Methoden drückt man auch thatsächlich den Radiusvektor durch die Gleichung

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi)}$$

als Funktion von v aus, und giebt dann allerdings gewöhnlich $e\cos\pi$ und $e\sin\pi$

1) Om användningen af den absoluta störingsteorien etc. Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Utgifna af H. Gyldén. Band IV Heft 3.

2) Ueber die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie etc. Berlin-Göttingen 1890.

3) Backlund, Ueber die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VII. Série. Tome XXXVIII No. 11.



als Funktionen der Zeit, oder man fügt dem angeführten Ausdruck einen Faktor hinzu, der die Störungen des Radiusvektors als Funktionen der Zeit enthält. Gegen ein solches Verfahren lässt sich Nichts einwenden. Am vorteilhaftesten habe ich gefunden, einige der auftretenden Funktionen durch v, andere durch die Zeit auszudrücken; um jedoch die Integrationen nicht unnütz zu compliciren, habe ich zunächst überall v als unabhängige Veränderliche beibehalten und ersetze dann da, wo es angemessen erscheint, v durch die Zeit. Auch nimmt die Gyldén'sche Entwicklung der Störungsfunktion, die nach diesem Princip ausgeführt ist, eine sehr symmetrische Form an.

In seinem Werke „Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" macht Herr Poincaré[1]) einige Bemerkungen über den Gebrauch von v als unabhängiger Veränderlicher. Er sagt, die wahre Länge v' des störenden Körpers, welche in der Störungsfunktion auftritt, sei eine bekannte Funktion der Zeit, aber eine unbekannte Funktion von v; bei Ersetzung von v' durch v führe man also noch unbekannte Grössen ein, was man nicht thäte, wenn man v' durch die Zeit ersetzt. Indessen enthält die Störungsfunktion nicht nur v', sondern auch v, und vor allem die Differenz $v-v'$. Vermeidet man, v' selbst durch noch unbekannte Grössen auszudrücken, so findet man dieselben an anderer Stelle wieder, und die Differenz $v-v'$ enthält stets solche unbekannten Grössen, wie man sie auch transformiren möge.

6. Im vorliegenden ersten Teile werde ich die Grundformeln für die Bewegung des gestörten Planeten geben und die Differentialgleichungen seiner Coordinaten integriren, d. h. die Relationen zwischen den heliocentrischen Coordinaten und der Zeit herstellen. Da wir als unabhängige Veränderliche die wahre Länge v einführen, so werden wir den Radiusvektor des Planeten, seine Breite über der Fundamentalebene und die Zeit als Funktion von v erhalten, und um die Coordinaten direkt als Funktion der Zeit darzustellen, ist noch eine unschwer auszuführende Transformation erforderlich, die ich im zweiten Teile zu geben beabsichtige.

Zur leichteren Orientirung habe ich der Arbeit ein ausführliches Inhaltsverzeichniss beigegeben.

Die Ausdrücke für die Coordinaten, die ich in diesem Teile ableite, sind so beschaffen, dass sie nach Potenzen der erwähnten mit den Excentricitäten und Neigungen vergleichbaren Grössen fortschreiten und dass ihre Coefficienten im Uebrigen nur von der mittleren Bewegung des gestörten Planeten abhängig sind und also mit derselben als Argument tabulirt werden können. Die zur Herstellung solcher allgemeinen Tafeln nötigen Rechnungen sind für die Planeten, deren mittlere Bewegungen zwischen 700″ und 1200″ liegen, bereits im Gange, und ich hoffe sie dem zweiten Teile einverleiben zu können; aus ihnen können die Störungsglieder für einen beliebigen Planeten direkt entnommen werden.

Begreiflicherweise kann ich im Folgenden die Formeln für die charakteri-

1) Tome II pag. 204.



stischen Planeten nicht in solcher Ausführlichkeit geben wie für die gewöhnlichen; denn je mehr ein Planet sich der strengen Commensurabilität nähert, desto mehr Glieder müssen berücksichtigt werden, und desto mehr Einfluss gewinnt der Betrag der Excentricität nnd der Neigung auf die Entwicklungen. Ich werde darum für die charakteristischen Planeten die Entwicklungen nur bis zu Gliedern niederen Grades vollständig geben, jedoch so, dass der weitere Gang der Rechnung ohne Schwierigkeiten zu übersehen ist. Aus dem genannten Grunde lassen sich die charakteristischen (oder wenigstens die kritischen) Planeten auch nicht ohne Weiteres in die zu berechnenden allgemeinen Tafeln aufnehmen, und es empfiehlt sich mehr, sie einzeln zn berechnen. Dennoch werde ich bestrebt sein, die Lücken, welche unsere Tafeln in der Nähe der Commensurabilitäten zunächst zeigen werden, auszufüllen, wenn dies auch der wenigen Planeten wegen, welche sich dort befinden, nicht lohnend erscheinen mag. Es ist aber von hohem Interesse, eine Uebersicht zu gewinnen, wie fictive Planeten sich an diesen Stellen verhalten würden; und es ist das Endziel unserer Arbeit, beurteilen zu können, wie jeder beliebige kleine Planet sich bewegen würde, der sich in dieser Zone befinden kann.

Im zweiten Teile soll von der numerischen Anwendung der im ersten gegebenen Entwicklungen die Rede sein und von der Herstellung der genannten allgemeinen Tafeln. Des weiteren soll der zweite Teil von der Bearbeitung der einzelnen Planeten handeln, d. h. also:

Von der Bestimmung der Bahnelemente aus den Beobachtungen mit Berücksichtigung der Störungen;

Von der Herstellung kurzgefasster Tafeln für die einzelnen Planeten, aus denen entweder die jeweiligen osculirenden oder analoge (instantane) Elemente entnommen werden können; diese Tafeln, welche auf einen Zeitraum von je hundert Jahren ausgedehnt werden sollen, werden für je einen Planeten den Raum von zwei Quartseiten voraussichtlich nicht übersteigen. Für den Planeten (91) Aegina sind sie bereits berechnet;

Endlich von der Verbesserung der Bahnelemente und der genannten Tafelwerte aus den gefundenen Differenzen „Beobachtung—Rechnung", worin auch die im sechsten Kapitel dieses ersten Teils erwähnte seculare Variation der Elemente einbegriffen ist.

7. Man wird vielleicht in dieser Arbeit Untersuchungen darüber vermissen, ob die angewandten Reihenentwicklungen und Annäherungsverfahren in streng mathematischem Sinne convergent sind. Ich bin aus begreiflichen Gründen in dieser Frage einstweilen nicht zu abschliessenden Resultaten gelangt, und habe mich mit der Thatsache begnügt, dass sie für die praktische Lösung unserer Aufgabe brauchbar sind, wie aus den wertvollen Untersuchungen des Herrn Poincaré folgt, soweit es nicht im Folgenden selbst bewiesen ist. Meine Bemühungen waren darauf gerichtet, mit einer gewissen mathematischen Strenge — zu der ich die Anregung Herrn Poincaré's wertvollem Werk[1]) verdanke —,

1) Poincaré, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.

vorzugehen, indem ich wenigstens die Vorbedingungen für die Brauchbarkeit unserer Methode festgestellt, und es vermieden habe, den Ausdruck Convergenz da zu brauchen, wo seine Berechtigung nicht nachgewiesen ist.

Damit stelle ich mich auch nicht auf den Standpunkt, den nach Herrn Poincaré die Astronomen im Allgemeinen einnehmen; es wäre zweckmässig, dass man sich stets des Ausdrucks fallende (und zwar stark oder schwach fallende) und steigende Reihen bediente, wenn es sich um asymptotische oder endliche Reihen handelt. Bei uns treten nämlich (Kap. VII § 4) u. a. steigende endliche Reihen auf, und auch die asymptotischen Reihen reduciren sich in der Praxis auf endliche, die die betreffende Funktion genähert darstellen.

8. In der längeren Reihe von Jahren, während der die vorliegende Arbeit entstanden ist, habe ich Gelegenheit gehabt, Ratschläge, die mir von vielen Seiten freundlichst erteilt wurden, zu befolgen, und aus dem Verkehr mit befreundeten Astronomen Nutzen zu ziehen.

In allererster Linie schulde ich meinem unvergesslichen Lehrer Gyldén ein dankbares Andenken. Vom September 1885 bis zum Mai 1888 habe ich, mit nur 7-monatlicher Unterbrechung im Jahre 1887, in Stockholm unter seiner Leitung studirt. Ihm verdanke ich die Anregung zur vorliegenden Abhandlung, wenn ich auch in den Jahren seit 1890, in denen diese Arbeit die gegenwärtige Form erhalten hat, mehr und mehr den praktischen Zielen der Störungsrechnung gefolgt und häufig nicht unerheblich von den von Gyldén eingeschlagenen Wegen abgewichen bin.

Ich kann nicht unterlassen, zu erwähnen, dass über dieser Arbeit insofern ein trauriges Schicksal gewaltet hat, als ich während der Abfassung derselben den Tod dreier Männer zu beklagen hatte, die ihr nahe gestanden und ein lebhaftes Interesse für sie bekundet haben. Am 24. Mai 1895 starb Hans Masal im Alter von nur 28 Jahren, mit dem ich in Stockholm gemeinsam gearbeitet und oft die Pläne meiner Arbeiten besprochen habe. Am 20. Oktober 1896 starb Tisserand, dem ich nicht nur für Erteilung wertvoller Ratschläge zur grössten Dankbarkeit verpflichtet bin, sondern auch für das Interesse, dass er mir in jeder Beziehung entgegenbrachte. Endlich am 9. November 1896 starb Gyldén.

Den Herren Bohlin und Callandreau verdanke ich ebenfalls manchen Gedanken, der für die Ausführung meines Planes von Wichtigkeit geworden ist; ersterer hat inzwischen eine sehr interessante Abhandlung[1]) veröffentlicht, die einen ähnlichen Zweck verfolgt, in der aber andere Methoden zur Anwendung kommen, so dass eine Vergleichung der auf beiden verschiedenen Wegen gewonnenen Resultate nicht nur eine wertvolle Controlle bietet, sondern auch in mancher anderen Hinsicht zu wichtigen Schlüssen führen dürfte.

Bei der Berechnung der im Folgenden erwähnten allgemeinen Tafeln hat

---

1) Karl Bohlin, Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten. Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala 1895—96.

mir Herr Wellmann, zuerst auf Veranlassung von Herrn Förster und dann auf Veranlassung von Herrn Bauschinger, Hilfe geleistet; der letztere, der mir auch sonst in dieser Angelegenheit freundlich entgegenkam, hat gleich nach der Uebernahme des Direktorats des astronomischen Recheninstituts die Organisation[1]) der Bearbeitung der kleinen Planeten in einer Weise in die Hand genommen, die die besten Aussichten auf Erfolg bietet.

Endlich hat Herr Schur die Freundlichkeit gehabt, die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen dafür zu gewinnen, dass sie die vorliegende Arbeit in ihre Abhandlungen aufnahm, was deswegen für mich von besonderem Wert war, weil ich nach längeren vergeblichen Bemühungen, eine Gelegenheit für den Druck derselben in Deutschland zu finden, schon vollständig ratlos war.

Allen diesen Herren, sowie der genannten Gesellschaft, sage ich meinen wärmsten Dank.

Erstes Kapitel.

Die Grundprincipien der Gyldén'schen Störungstheorie. — Die allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale. — Die Gyldén'schen Coordinaten ϱ, η und S.

1. Ich will nun die Grundlagen besprechen, auf denen unsere Methode beruht und werde dabei Gelegenheit haben, auf die Hauptpunkte der Gyldén'schen Störungstheorie einzugehen. Seien:

x, y, z die Coordinaten des gestörten Körpers in bezug auf drei rechtwinklige Axen von unveränderlicher Richtung, deren Anfangspunkt in den Schwerpunkt der Sonne fällt,

r sein Radiusvektor,

m seine Masse in Teilen der Sonnenmasse, so dass also m eine absolute Zahl ohne Dimension ist,

x', y', z', r', m' die analogen Grössen in bezug auf den störenden Körper,

t die Zeit,

k^2 das Quadrat der Constante der Gravitation, also die Sonnenmasse, aus-

1) Bauschinger, Ueber die Bearbeitung der kleinen Planeten. Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. 31. Jahrgang (1896). IV. Heft pag. 284.



gedrückt in denselben Einheiten, die für die Entfernungen und für die Zeit angenommen werden. Nehmen wir als Einheit für die Entfernungen denjenigen Wert für die halbe grosse Axe der Erdbahn, den Gauss benutzt hat, und als Einheit für die Zeit den mittleren Sonnentag, so ist $\log k^2 = 8.2355814-10$.

Bezeichnen wir endlich mit $M = k^2(1+m)$ die Summe der Massen der Sonne und des gestörten Körpers, so gelten die folgenden Differentialgleichungen für die Coordinaten des gestörten Körpers:

$$
\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dx},^{1)}
$$

$$
\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{My}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dy}, \tag{1}
$$

$$
\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dz},
$$

wo die Störungsfunktion Ω durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$
\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\}.
$$

Dies sind die Gleichungen, welche wir zu lösen haben. Ihre rechten Seiten sind multiplicirt mit der störenden Masse m', ohne dass jedoch von vornherein angenommen werden könnte, dass sie auch stets mit dieser Masse an Grösse vergleichbar bleiben. Wenn es sich indessen, wie in vorliegender Arbeit, um die Berechnung der Störungen handelt, welche die kleinen Planeten durch die grossen erleiden, so können wir aus den Beobachtungen, wie aus analytischen Untersuchungen, schliessen, dass — wenigstens während eines beschränkten und zwar beträchtlich langen Zeitraumes — die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I. Die Radienvektoren der störenden und des gestörten Planeten oscilliren um gewisse Mittelwerte, von denen sie höchstens um Grössen abweichen, die mit den Excentricitäten der gegenwärtigen osculirenden Ellipsen verglichen werden können.

II. Dieselbe Bedingung für die Geschwindigkeiten der Planeten.

III. Die Differenzen zwischen den Radienvektoren der störenden und des gestörten Planeten und daher auch ihre gegenseitigen Entfernungen bleiben stets an Grösse vergleichbar mit den Radienvektoren selbst; es finden also keine bedeutenden Annäherungen zwischen den einzelnen Körpern des Systems statt.

IV. Die momentanen Bahnebenen der störenden und des gestörten Körpers, d. h. die Ebenen, die durch den Radiusvektor und die augenblickliche Bewegungsrichtung (die Tangente an die Bahn) bestimmt sind, bilden unter sich Win-

1) Ich bediene mich bei Darstellung partieller Differentialquotienten stets dieser Schreibweise, da in der That das im Nenner stehende Differential ein totales ist, und man auf diese Weise sich leichter gegen Fehler schützen kann.

kel, welche stets mit den gegenseitigen Neigungen der gegenwärtigen osculirenden Ellipsen vergleichbar bleiben. Hierdurch schliessen wir auch den Fall einer rückläufigen Bewegung aus.

2. So lange diese Voraussetzungen erfüllt sind, sind die rechten Seiten der Gleichungen 1) nicht nur klein von der Ordnung der störenden Masse, sondern sie können auch in Reihen entwickelt werden, die nach Potenzen von Grössen fortschreiten, welche von der Ordnung der genannten Excentricitäten und Neigungen sind. Dieses sind die Gesichtspunkte, welche den Weg angezeigt haben für die praktische Lösung des Dreikörperproblems nach den älteren Methoden. Man hat in der ersten Annäherung die rechten Seiten der Gleichungen 1) vernachlässigt, woraus sich die elliptische Bewegung ergab, und hat die Glieder, welche man bei späterer Berücksichtigung dieser rechten Seiten erhält, „Störungen" genannt. Die successiven Annäherungen, welche man auf diese Weise erhielt, schreiten nach den Potenzen der störenden Masse m' fort; aber nicht eigentlich nach den reinen Potenzen dieser Masse, sondern ihn Wahrheit nach solchen der Störungen selbst. Da nun aber diese Störungen in vielen Fällen beträchtlich grösser sind als die störende Masse, so wird dieses Verfahren häufig unbrauchbar. Es werden nämlich die Störungen durch Reihen dargestellt, deren Glieder in die folgenden drei Gruppen zerfallen:

I. Die secularen Glieder; dieselben sind Grössen von der Ordnung der störenden Masse multiplicirt mit der Zeit t, oder Potenzen solcher Grössen. Wenn es auch wahrscheinlich ist, dass bei richtiger Anordnung der Annäherungen die Reihen, welche diese Glieder bilden, convergent bleiben, so kann doch nur für beschränkte Werte von t ihre Convergenz hinreichend stark sein, um sie praktisch verwertbar zu machen. Sichere Schlüsse über den Verlauf der Planetenbewegungen während eines unbeschränkten Zeitraumes werden sich mit ihrer Hilfe schwerlich ziehen lassen.

II. Die sogenannten langperiodischen Ungleichheiten; dieselben treten auf, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers sich einem commensurablen Verhältniss nähert, in welchem Falle die betreffenden Glieder durch den Integrationsprocess sehr kleine Divisoren erhalten und beträchtlich gross werden. Wenn auch diese Glieder eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, so tritt doch der Fall ein, dass die Reihen, welche sich aus ihnen zusammensetzen, überhaupt erst bei einem späteren Gliede anfangen zu fallen. Infolge dessen führen die ersten Annäherungen zu illusorischen Resultaten und bei nicht streng richtiger Anordnung der Entwicklungen wird man divergente Reihen erhalten.

III. Die gewöhnlichen Glieder, d. h. die periodischen Glieder, deren absolute Werte mit der störenden Masse numerisch vergleichbar sind; durch ihr Auftreten wird die Brauchbarkeit des Näherungsverfahrens nicht in Frage gestellt, so dass sie keine Schwierigkeiten bieten.

3. Die Unzuträglichkeiten, welche aus den Entwicklungen nach den Gliedern



der beiden ersten Klassen entstehen, haben Gyldén veranlasst, neue Methoden aufzusuchen. Schon Lagrange und Laplace war es geglückt, die secularen Glieder in periodischer Form darzustellen, allerdings mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades in bezug auf die Excentricitäten und Neigungen; sie erhielten Glieder von ausserordentlich langen Perioden, die indessen nicht mehr die störende Masse als Faktor enthalten, sondern von der Ordnung der Excentricitäten und Neigungen selbst sind. Um die secularen Glieder in dieser periodischen Form darzustellen, hatte Lagrange die Gleichungen 1) integrirt, indem er bereits in der ersten Annäherung denjenigen Teil der rechten Seiten berücksichtigte, welcher secularer Natur ist. Hiermit hatte er bereits die Keppler'sche Ellipse als Grundlage für die Annäherungen verlassen, und sich der wahren Form der Planetenbahnen genähert. Gyldén hat sich vorgenommen, das Auftreten secularer Glieder in den Integralen der Gleichungen 1) vollständig zu vermeiden, und zu diesem Zweck führt er Glieder ein, die den von Lagrange gefundenen analog sind, und die er elementare Glieder nennt. Die absolute Bahn Gyldén's ist eine Bahn, die man erhält, indem man die Gleichungen 1) mit Berücksichtigung aller dieser elementaren (also im Integrale die störende Masse nicht als Faktor enthaltenden) Glieder integrirt. Diese Bahn weicht von der wahren Bahn nur um Grössen ab, welche mit der störenden Masse multiplicirt sind, und sie ist vielleicht bei Untersuchungen über die Bewegungen der Planeten während eines erheblich langen (oder unbeschränkten) Zeitraumes, also auch über die Stabilität des Systems, von grösster Bedeutung.

Die Differenz zwischen der wahren und der absoluten Bahn, nach der obigen Definition, die Gyldén für die letztere giebt[1]), bleibt also stets unterhalb einer gewissen Grenze; indessen erreicht sie in vielen Fällen recht erhebliche Beträge, und die Berechnung der absoluten Bahn an und für sich ist für die praktische Rechnung in keiner Weise ausreichend, um den Ort eines Planeten so genau zu geben, dass seine Wiederauffindung mit dem Fernrohr ohne grosse Mühe möglich wäre.

Bei Darstellung der Planetenbewegungen für einen Zeitraum von wenigen Jahren oder Jahrzehnten gewinnt man durch Anwendung der absoluten Bahn keinen wesentlichen Vorteil gegenüber der Keppler'schen Ellipse; denn diejenigen Störungsglieder, welche während eines kurzen Zeitraums am merklichsten sind, sind in derselben nicht einbegriffen. Die Bedeutung der absoluten Bahn liegt also auf dem Gebiete der theoretischen Untersuchungen über den Verlauf der Planetenbewegungen während eines sehr langen Zeitraumes und über die Stabilität unseres Planetensystemes, nicht aber auf dem Gebiete der praktischen Störungsrechnung.

Man kann vielmehr bei diesen Rechnungen von der Herstellung des Ausdrucks für die absolute Bahn vollständig absehen und statt der elementaren

1) Gyldén, Traité analytique des Orbites absolues des 8 Planètes principales. Tome I pag. 48 und 33 ff.



Glieder die secularen Glieder der älteren Methoden anwenden. Zu dieser Frage verweise ich auf die Bemerkungen zu Anfang des sechsten und auf das achte Kapitel.

Wenn nun auch die eigentliche absolute Bahn für die praktische Störungsrechnung keine wesentlichen Vorteile mit sich bringt, so ist doch das sonst von Gyldén eingeführte Verfahren zur Berechnung der Störungen dazu angethan, diese Rechnungen in ganz hervorragendem Maasse einfach und übersichtlich zu gestalten. Sehr verbreitet ist die irrige Meinung, dass die von Gyldén angewandten teilweise recht complicirten Transformationen und Integrationsverfahren in jedem Falle von Störungsrechnung in der Praxis angewandt werden müssten; in Wahrheit sind aber die Grundzüge der Gyldén'schen Störungstheorie ausserordentlich einfach und die complicirteren Entwicklungen treten nur da auf, wo es sich um Untersuchungen über die Stabilität des Systems und über besonders schwierige Fälle handelt, in welchen die älteren Methoden versagen.

Gyldén ist davon ausgegangen, dass die in den älteren Theorieen auftretenden Störungen von derselben Grösse sein können, wie die Abweichung der als Ausgangspunkt für die Annäherungen genommenen Keppler'schen Ellipse von einer Kreisbahn; er wollte daher den Untersuchungen bereits in der ersten Annäherung eine Bahn zu Grunde legen, welche der wahren so nahe kommt, dass die Abweichungen dieser Bahn von der wahren wirklich als kleine Grössen aufzufassen sind, und in dieser Absicht entwickelt er den Begriff der absoluten Bahn.

4. Auch wir wollen versuchen, schon in der ersten Annäherung der wahren Bewegung möglichst nahe zu kommen, und zwar näher als die absolute Bahn, indem wir uns allerdings damit begnügen, diese Bewegung während eines beschränkten Zeitraums darzustellen; wir stellen uns die folgende Aufgabe:

Da es gegenwärtig unmöglich ist, die Differentialgleichungen 1) von vornherein mit voller Berücksichtigung der rechten Seiten zu integriren, so soll wenigstens bereits in der ersten Annäherung diesen rechten Seiten insoweit Rechnung getragen werden, dass die endgiltige Form der Lösungen sich von vornherein ergiebt. Die Form der Reihen, durch welche die Coordinaten dargestellt werden, soll also bereits in der ersten Annäherung hergestellt sein; durch die weiteren Annäherungen sollen die Coefficienten der Glieder dieser Reihen genauer bestimmt und nur solche neuen Glieder hinzugefügt werden, die denen der ersten Annäherung analog sind, d. h. keine von jenen wesentlich verschiedene Perioden haben. Diese Bedingung ist in den älteren Methoden nicht erfüllt, da namentlich in der ersten Annäherung denjenigen Gliedern nicht Rechnung getragen ist, deren Perioden von der Umlaufszeit des störenden Körpers abhängen.

Um sich der wahren Form der Planetenbewegungen möglichst zu nähern, führt Gyldén mehrere Hilfsgrössen ein, von denen ich die Wichtigeren beibehalten habe. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass der gestörte Planet sich in einer festen Ebene bewege, und nennen wir r den Radiusvektor und v

die Länge des Planeten in dieser Ebene, gerechnet von irgend einer festen Richtung an, so können wir offenbar die Gleichung der vom Planeten beschriebenen Curve unter der Form

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho} \tag{2)}$$

schreiben; in dieser Gleichung bedeutet die Constante a einen gewissen Mittelwert des Radiusvektor; η und ϱ sind Funktionen der Länge v und sollen durch trigonometrische Reihen dargestellt werden. Ueber η wollen wir später verfügen und zwar so, dass es an Grösse mit der elliptischen Excentricität verglichen werden kann und ausserdem sich nur sehr langsam mit v (oder mit der Zeit) ändert. Die Funktion ϱ bestimmen wir durch Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir später aus den Gleichungen 1) ableiten werden. Die Gleichung 2) steht also in gewisser Analogie mit der Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi)}.$$

Solange die obengenannte Bedingung I (pag. 12) besteht, wird offenbar ϱ stets an Grösse mit der elliptischen Excentricität verglichen werden können, wenn a passend gewählt wird. In seiner Theorie der absoluten Bahnen nennt Gyldén a den Protometer; ich will diese Grösse im Folgenden **Halbaxe der Bahn** nennen, da sie bei uns nicht immer ein absolutes Element im Gyldén'schen Sinne ist.

Wir wollen nun die Relation zwischen der Länge v und der Zeit t betrachten; in der elliptischen Bewegung gilt das Princip von der Erhaltung der Flächen

$$r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{Ma(1-e^2)}.$$

In der gestörten Bewegung ist dasselbe für den gestörten Planeten nicht mehr erfüllt; solange aber die Bedingung II (pag. 12) besteht, wird auch die Flächengeschwindigkeit um einen gewissen Mittelwert oscilliren, so dass wir in Analogie mit der vorigen die folgende Gleichung ansetzen können:

$$r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}, \tag{3)}$$

wo also die Funktion S eine kleine Grösse ist. Es wird sich später zeigen, dass S nur solche Glieder enthält, die mit der störenden Masse multiplicirt sind, also keine elementaren Glieder. Man bewirkt dies durch die Gyldén'sche Definition der Funktion η, welche wir noch in diesem Kapitel geben wollen. Die Funktion S bestimmt sich aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung, und zur Herstellung der Relation zwischen v und t muss zuletzt noch die Gleichung 3) integrirt werden.

5. Die Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen ϱ, S, η u. a., welche ich Gyldén'sche Coordinaten nennen will, werden im zweiten Kapitel abgeleitet; wir wollen aber jetzt gleich einige Betrachtungen über die Form dieser Gleichungen und ihrer Integrale machen und wollen auch dabei über die Funktion η verfügen. Diese Differentialgleichungen sind nämlich von folgenden beiden Typen:

$$\text{4)} \qquad \frac{dS}{dv} = \sum a_n \sin(\lambda_n v - B_n)$$

$$\text{5)} \qquad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1-\beta)\varrho = \sum b_n \cos(\lambda_n v - B_n).$$

Wir nehmen an, dass die Grössen a_n, b_n, λ_n, B_n und β Constante seien und dass die Grössen a_n, b_n und β die störende Masse als Faktor enthalten und mit ihr an Grösse vergleichbar sind. In Wahrheit trifft dies nicht immer zu, doch werden unsere vorläufigen Betrachtungen durch diese Annahme nicht beeinträchtigt.

Die Integration der Gleichung 4) giebt uns:

$$\text{6)} \qquad S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo a_0 die Integrationsconstante ist. Die Grösse der verschiedenen Glieder, aus denen sich die Funktion S zusammensetzt, hängt also im Wesentlichen von den Divisoren λ_n, also von der Periode der Glieder ab; man kann drei Klassen dieser Divisoren, von denen übrigens keiner gleich Null ist, unterscheiden, entsprechend den drei Klassen von Gliedern, die wir bei Besprechung der älteren Methoden pag. 13 erwähnt haben:

I. Die Divisoren λ_n, welche klein von der Ordnung der störenden Masse sind; die von ihnen abhängigen Glieder werden durch die Integration um eine Ordnung der störenden Masse herabgedrückt und demnach sehr beträchtlich vergrössert. Sind sie in der Differentialgleichung 4) mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt, so werden sie im Integral 6) diese Masse nicht mehr als Faktor enthalten, also nach Gyldén's Bezeichnung elementar werden. Da die Coefficienten λ_n in diesem Falle sehr klein sind, so werden sich die entsprechenden Glieder äusserst langsam mit der Zeit ändern; wir nennen sie darum **langperiodisch elementare** Glieder.

II. Die Divisoren λ_n können auch klein sein, ohne die störende Masse als Faktor zu enthalten, wenn nämlich das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahe commensurabel ist. Die entsprechenden Glieder in dem Integral 6) werden zwar erster Ordnung in bezug auf die störende Masse bleiben, indessen können sie ihrem numerischen Betrage nach weit grösser werden. Ich werde später zeigen, dass sie im Maximum (wenigstens in speciellen Fällen) von der Ordnung der dritten Wurzel aus der störenden Masse werden. Gyldén nennt sie charakteristische Glieder, und da

auch für sie der Faktor λ_n klein ist, so können wir sie **langperiodisch charakteristische** Glieder nennen. Gyldén hat darauf aufmerksam gemacht, dass man sie nicht an Grösse mit der störenden Masse vergleichen darf, und also ihre höheren Potenzen in vielen Fällen schon bei der ersten Annäherung berücksichtigen muss. Wir besitzen gegenwärtig mehrere Methoden zu ihrer Berechnung, welche ausser von Gyldén selbst auch von den Herren Harzer, Backlund u. a. angewandt worden sind. Ich werde dasselbe äusserst einfache Verfahren anwenden, dessen Grundzüge sich bereits in meiner vor 8 Jahren erschienenen schwedischen Arbeit finden, wenn dasselbe auch etwas modificirt werden muss, um allgemein angewandt werden zu können.

III. Die Glieder, deren Divisoren λ_n nicht klein sind, wollen wir **gewöhnliche** Glieder nennen; sie sind im Integral nicht wesentlich grösser als in der Differentialgleichung.

Dieses sind die drei Klassen von Gliedern, welche genau den drei oben erwähnten Klassen der älteren Theorieen entsprechen.

Wir wollen die λ_n der ersten Klasse mit σ_n bezeichnen, wo also die σ_n von der Ordnung der störenden Masse sind. Die Divisoren der zweiten Klasse bezeichnen wir mit δ_n, wo die δ_n auch klein, jedoch erheblich grösser als die störende Masse sind.

Um unser Verfahren übersichtlicher zu gestalten, wollen wir die Glieder der drei Klassen trennen und die Gleichung 4) schreiben, wie folgt:

$$\text{4a)} \qquad \frac{dS}{dv} = \sum a_n \sin(\sigma_n v - A_n) + \sum a'_n \sin(\delta_n v - C_n) + \sum a''_n \sin(\lambda_n v - B_n),$$

wo die λ_n also nicht mehr kleine Grössen vorstellen. Das Integral wird:

$$\text{6a)} \qquad S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\sigma_n} \cos(\sigma_n v - A_n) - \sum \frac{a'_n}{\delta_n} \cos(\delta_n v - C_n) - \sum \frac{a''_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n).$$

Wir wollen nun in gleicher Weise die Gleichung 5) betrachten. Wenn wir sie integriren, so erhalten wir:

$$\text{7)} \qquad \varrho = \varkappa \cos[\sqrt{1-\beta}\, v - \Gamma] + \sum \frac{b_n}{1-\beta-\lambda_n^2} \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo $\varkappa$ und Γ die beiden Integrationsconstanten sind. Wir bemerken von vornherein, dass, wie sich unten zeigen wird, keiner der Coefficienten λ_n gleich $\sqrt{1-\beta}$ ist, was zur Folge hätte, dass das entsprechende Glied den Divisor Null erhielte; indessen befinden sich unter den λ_n:

I. Solche, welche sich von der Einheit nur um eine Grösse von der Ordnung der störenden Masse unterscheiden; wir setzen sie unter die Form:

$$\lambda_n = 1 - \sigma_n,$$

wo die σ_n, wie oben, Grössen von der Ordnung der störenden Masse sind. Die



entsprechenden Glieder in ϱ erhalten dann einen Divisor von eben dieser Ordnung und werden elementar sein, aber nicht von langer Periode (wenigstens nicht in der Form, in der sie hier auftreten); ihre Periode wird sich vielmehr um äusserst wenig von der Umlaufszeit des Planeten unterscheiden; wir nennen sie **kurzperiodisch elementare** Glieder.

Ferner befinden sich unter den λ_n:

II. Solche, welche sich von der Einheit um kleine Grössen von der Ordnung der oben erwähnten δ_n unterscheiden: wir geben ihnen die Form:

$$\lambda_n = 1-\delta_n,$$

und nennen die so definirten Glieder **kurzperiodisch charakteristische**, da ihre Divisoren ebenfalls von der Ordnung der δ_n sind, und auch sie durch die Integration stark vergrössert werden.

III. Diejenigen der Coefficienten λ_n, welche beträchtlich von der Einheit abweichen, verursachen keine kleinen Divisoren; die von ihnen abhängigen Glieder werden durch die Integration nicht wesentlich vergrössert und wir nennen sie **gewöhnliche Glieder**.

Die eben genannten drei Klassen von Gliedern entsprechen ebenfalls den in der Funktion S, sowie den in der älteren Störungstheorie auftretenden Klassen.

Wir zerlegen die in ϱ vorkommenden Glieder wieder, indem wir schreiben:

$$\text{5a)}\quad \frac{d^2\varrho}{dv^2}+(1-\beta)\varrho = \sum b_n \cos[(1-\sigma_n)v-\Gamma_n]+\sum b'_n \cos[(1-\delta_n)v-D_n]+\sum b''_n \cos(\lambda_n v-B_n),$$

wo die Γ_n und die D_n Constante sind, und wo nunmehr unter den λ_n nur diejenigen begriffen sind, welche zu gewöhnlichen Gliedern gehören. Man hat dann

$$\text{7a)}\quad \varrho = \varkappa\cos[(1-\varsigma)v-\Gamma]+\sum\varkappa_n\cos[(1-\sigma_n)v-\Gamma_n]+\sum\beta_n\cos[(1-\delta_n)v-D_n]+\sum\bar{b}_n\cos(\lambda_n v-B_n),$$

wo bezeichnet ist:

$$1-\varsigma = \sqrt{1-\beta}$$

$$\varkappa_n = \frac{b_n}{2\sigma_n-\sigma_n^2-\beta} = \frac{b_n}{2(\sigma_n-\varsigma)-(\sigma_n^2-\varsigma^2)}$$

$$\beta_n = \frac{b'_n}{2\delta_n-\delta_n^2-\beta} = \frac{b'_n}{2(\delta_n-\varsigma)-(\delta_n^2-\varsigma^2)}$$

$$\bar{b}_n = \frac{b''_n}{1-\lambda_n^2-\beta}.$$

6. Wir können nun die Funktion η bestimmen. Zu diesem Zweck bezeichnen wir nach Gyldén mit (ϱ) den Teil der Funktion ϱ, welcher elementarer Form ist; wir setzen also



8) $$(\varrho) = \varkappa \cos[(1-\varsigma)v-\Gamma] + \sum \varkappa_n \cos[(1-\sigma_n)v-\Gamma_n].$$

Zur Abkürzung bezeichne ich:

9) $$\begin{aligned} \omega &= \Gamma + \varsigma v \\ \omega_n &= \Gamma_n + \sigma_n v \end{aligned}$$

so dass:

8a) $$(\varrho) = \varkappa \cos(v-\omega) + \sum \varkappa_n \cos(v-\omega_n).$$

Wir bestimmen nun die beiden Funktionen η und Π so, dass

10) $$\begin{aligned} \eta \cos \Pi &= \varkappa \cos \omega + \sum \varkappa_n \cos \omega_n \\ \eta \sin \Pi &= \varkappa \sin \omega + \sum \varkappa_n \sin \omega_n, \end{aligned}$$

und wenn wir die erste dieser Gleichungen mit $\cos v$ und die zweite mit $\sin v$ multipliciren und addiren, so kommt:

11) $$(\varrho) = \eta \cos(v-\Pi).$$

Die Funktionen η und Π sind also aus langperiodisch elementaren Gliedern zusammengesetzt, und für Π können wir schreiben:

12) $$\Pi = \Pi_0 + \varsigma v.$$

Es gelten dann auch die folgenden Relationen:

10a) $$\begin{aligned} \eta \cos \Pi_0 &= \varkappa \cos \Gamma + \sum \varkappa_n \cos(\omega_n - \varsigma v) \\ \eta \sin \Pi_0 &= \varkappa \sin \Gamma + \sum \varkappa_n \sin(\omega_n - \varsigma v) \end{aligned}$$

10b) $$\begin{aligned} \eta \cos(\Pi_0 - \Gamma) &= \varkappa + \sum \varkappa_n \cos(\omega_n - \omega) \\ \eta \sin(\Pi_0 - \Gamma) &= \sum \varkappa_n \sin(\omega_n - \omega), \end{aligned}$$

welch letztere von Gyldén angewandt werden, dessen π mit unserem Π_0 identisch ist. Ferner:

13) $$\eta^2 = (\varrho)^2 + \left(\frac{D(\varrho)}{dv}\right)^2,$$

wo das Differentialzeichen D bedeutet, dass bei der Differentiation die Grössen ω und ω_n als Constanten anzusehen sind.

7. Offenbar wird, solange die pag. 12 gegebenen Bedingungen erfüllt sind, ϱ numerisch mit den elliptischen Excentricitäten verglichen werden können; es wird dies auch der Fall sein für die Funktion η und für die Coefficienten $\varkappa$ und $\varkappa_n$. Allerdings ist das für die letzteren von vornherein nicht unbedingt notwendig: es könnten einige dieser Coefficienten sogar recht erhebliche Werte haben, ihre Summe aber während eines sehr langen Zeitraumes sich auf eine kleine Grösse reduciren, wenn ihre Perioden sehr nahe gleich sind; indessen folgt aus

den Ausführungen des achten Kapitels, dass während eines beschränkten Zeitraums sich alle $\varkappa_n$ als solche kleine Grössen darstellen lassen.

Wir nennen nun, wie schon pag. 5 bemerkt, eine jede Grösse, die die n-te Potenz von η oder ein äquivalentes Produkt der $\varkappa_n$-Coefficienten enthält, eine Grösse **n-ten Grades**; dazu bemerken wir, dass (ausser $\varkappa$ selbst) nur soviele der $\varkappa_n$-Coefficienten ersten Grades sind, wie es störende Körper giebt, dass die übrigen höheren und zwar stets ungeraden Grades sind; im Folgenden wird sich dies ergeben. Ebenso werden wir später sehen, dass die Funktion ϱ auch Glieder nullten Grades enthält, welche ihrem numerischen Betrage nach nicht grösser werden können als die elliptischen Excentricitäten; es ist aber infolge dessen z. B. nur die Grösse $(\varrho)^n$, und nicht auch ϱ^n, vom n-ten Grade.

Unter den Coefficienten b_n der Gleichung 5) werden natürlich auch solche sich befinden, welche mit dem Quadrat oder einer höheren Potenz der störenden Masse multiplicirt sind; dieselben werden durch den Integrationsprocess nicht eigentlich elementar (nullter Ordnung in bezug auf die störende Masse), sondern sie werden nur um eine Grössenordnung erniedrigt. Gyldén nennt sie subelementare Glieder; sie haben durchaus dieselbe Form wie die elementaren, und da es überhaupt nicht immer thunlich ist, sie von den letzteren zu trennen, so denken wir sie uns stets mit einbegriffen, wenn wir von Gliedern elementarer Form sprechen.

Ich will nun noch eine Bezeichnung einführen, die ich bereits in meinen früheren Arbeiten benutzt habe. Es soll nämlich nach dem gewöhnlichen Gebrauch ein Glied, das die n-te Potenz der störenden Masse als Faktor enthält, kurz ein Glied **n-ter Ordnung** genannt werden. Da aber diese Bezeichnung häufig keine richtige Vorstellung von der numerischen Grösse des betreffenden Gliedes giebt, da dasselbe kleine Divisoren von der Ordnung der δ_n enthalten kann, so nenne ich ein Glied, das die n-te Potenz der störenden Masse enthält und auch seinem absoluten Betrage nach mit derselben verglichen werden kann, ein Glied **rein n-ter Ordnung**. Es werden demnach z. B. in der Gleichung 7a) die gewöhnlichen Glieder (also die Coefficienten $\bar{b}_n$) rein erster Ordnung, die charakteristischen (also die Coefficienten β_n) aber nicht rein erster Ordnung sein; ein Produkt aus einem $\bar{b}_n$- und einem β_n-Coefficienten wird zwar zweiter Ordnung, aber nur rein erster Ordnung sein. Ich befolge stets das Princip, die Glieder rein erster Ordnung durch lateinische Buchstaben, diejenigen, welche kleine Divisoren von der Ordnung der δ_n enthalten, dagegen mit griechischen Buchstaben zu bezeichnen, so dass man sich leicht eine Vorstellung vom Betrage eines jeden Gliedes machen kann.

Wir erinnern zum Schluss daran, dass wir also vor allem vier Arten von Gliedern zu betrachten haben, deren Argumente die folgenden sind:

$$14)\qquad \begin{array}{ll} \text{A)}\ \ \sigma_n v - A_n, & \text{C)}\ \ \delta_n v - C_n \\ \text{B)}\ \ (1-\sigma_n)v - \Gamma_n, & \text{D)}\ \ (1-\delta_n)v - D_n, \end{array}$$



wie sie schon Herr Harzer[1]) bezeichnet hat, und wir wollen sie im Folgenden kurz Glieder der Form A, B, C oder D nennen. Die Glieder der Formen A und B sind die elementaren (und subelementaren), die der Formen C und D die charakteristischen. Andererseits sind die Glieder A und C langperiodisch, die Glieder B und D kurzperiodisch. Weiter unten wird sich zeigen, dass die Glieder A stets von einem geraden, mindestens vom zweiten Grade, dagegen die Glieder B stets von einem ungeraden Grade sind.

Alle Glieder, welche keiner der Formen 14) angehören, nenne ich „gewöhnliche" Glieder.

Zweites Kapitel.

Ableitung der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten. — Formeln für die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene.

1. Kehren wir zurück zu den Gleichungen 1) für die Coordinaten des gestörten Körpers:

$$15)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dx},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{My}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dy},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{Mz}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dz}, \end{aligned}$$

wo man für die Störungsfunktion Ω hat, ausgedrückt in rechtwinkligen Coordinaten:

$$16)\qquad \Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\varDelta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\},\quad \varDelta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

und ausgedrückt in Polarcoordinaten, wenn man mit H den Winkel zwischen den Radienvektoren des gestörten und des störenden Körpers bezeichnet:

$$17)\qquad \Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\varDelta}-\frac{r}{r'^2}\cos H\right\},\quad \varDelta = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}.$$

---

1) Harzer, Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VII. Serie. Tome XXXIV No. 12.

Wir wollen die Coordinaten $x\,y\,z$ auf irgend eine als fest angenommene Lage der Ekliptik beziehen; im allgemeinen wird man hierfür die mittlere Ekliptik irgend eines bestimmten Jahresanfangs, wie 1850.0, 1900.0 u. s. w. wählen.

Zunächst haben wir nun die Gleichungen 15) in derselben Weise zu transformiren, wie dies schon Hansen gethan hat, indem wir die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene — welche durch den Radiusvektor und die augenblickliche Bewegungsrichtung, also die Tangente an die Bahn bestimmt ist — trennen von der Bewegung dieser beweglichen Bahnebene gegen die feste Ekliptikalebene der $x\,y$. Wir führen zu diesem Zweck ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Axen von veränderlicher Richtung sind, aber denselben Anfangspunkt haben wie das System der $x\,y\,z$; wir nennen die Coordinaten in bezug auf dieses Systems $x_1\,y_1\,z_1$.

Wenn $\alpha, \beta, \gamma,\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die positiven Axen der x und x_1, der x und y_1, der x und z_1, u. s. w. mit einander bilden, so bestehen die drei Relationen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 + \gamma\, z_1, \\ y &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1, \\ z &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1, \end{aligned} \tag{18}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ y_1 &= \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ z_1 &= \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z. \end{aligned} \tag{19}$$

Zwischen den neun Cosinus α, β, γ u. s. w., welche übrigens variable Grössen sind, gelten die sechs folgenden Bedingungen, welche ausdrücken, dass die beiden Coordinatensysteme rechtwinklig sind:

$$\begin{aligned} \alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2 &= 1, & \alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 &= 0, \\ \beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2 &= 1, & \alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2 &= 0, \\ \gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2 &= 1, & \beta\gamma+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2 &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 1, & \alpha\,\alpha_1+\beta\,\beta_1+\gamma\,\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 &= 1, & \alpha\,\alpha_2+\beta\,\beta_2+\gamma\,\gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Aus diesen Relationen lassen sich die folgenden ableiten:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1, & \beta &= \alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2, & \gamma &= \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1, \\ \alpha_1 &= \beta_2\gamma-\beta\,\gamma_2, & \beta_1 &= \alpha\,\gamma_2-\alpha_2\gamma, & \gamma_1 &= \alpha_2\beta-\alpha\,\beta_2, \\ \alpha_2 &= \beta\,\gamma_1-\beta_1\gamma, & \beta_2 &= \alpha_1\gamma-\alpha\,\gamma_1, & \gamma_2 &= \alpha\,\beta_1-\alpha_1\beta. \end{aligned} \tag{22}$$

Die Gleichungen 20) bis 22) enthalten nur 6 unabhängige Bedingungen; es bleiben also zur Bestimmung der neun Cosinus, d. h. der Lage des Coordinatensystems der $x_1\,y_1\,z_1$ noch drei Relationen zu wählen. Wenn wir, wie Hansen, als $x_1\,y_1$-Ebene die momentane Bahnebene des Planeten nehmen, so muss der Radiusvektor des Planeten in dieser Ebene liegen, also

$$23)\qquad z_1 = 0$$

sein, oder:

$$a)\qquad \gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2 z = 0.$$

Dies ist die Gleichung aller Ebenen, welche den Radiusvektor zur Zeit t enthalten; für diejenige unter ihnen, welche auch die Tangente an die Bahn enthält, muss die Gleichung a) auch noch bestehen, wenn man x, y, z durch $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ ersetzt. Es muss also auch

$$b)\qquad \gamma dx+\gamma_1 dy+\gamma_2 dz = 0$$

sein, aus welcher Gleichung mit Hilfe von a) sich die folgende ergiebt:

$$24)\qquad x d\gamma+y d\gamma_1+z d\gamma_2 = 0.$$

Durch die Bedingungen a) und b) haben wir die $x_1 y_1$-Ebene in die momentane Bahnebene des Planeten gelegt; es bleibt nun noch die Aufstellung einer dritten Relation übrig, welche die Lage der x_1-Axe in dieser Ebene definirt. Wir bestimmen dieselbe durch die Relation

$$c_1)\qquad \beta d\alpha+\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2 = 0,$$

oder, wie mit Hilfe von 20) hieraus folgt,

$$c_2)\qquad \alpha d\beta+\alpha_1 d\beta_1+\alpha_2 d\beta_2 = 0,$$

womit die Lage der x_1-Axe durch eine Differentialgleichung bestimmt ist; es wird uns also später (Kap. III Nr. 4) noch übrig bleiben, die Integrationsconstante zu wählen, welche die Lage dieser Axe für einen bestimmten Zeitpunkt giebt.

2. Wir multipliciren nunmehr die drei Gleichungen 18) der Reihe nach einmal mit $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ und ein andermal mit $d\beta$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ und addiren; dann wird mit Hilfe der Relationen 20), 23) und c):

$$25)\qquad \begin{aligned} x d\alpha+y d\alpha_1+z d\alpha_2 &= 0,\\ x d\beta+y d\beta_1+z d\beta_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen mit 24) zusammengestellt werden können. Wenn wir nun die Gleichungen 19) differenziren, und auf 24) und 25) Rücksicht nehmen, so kommt:

$$
26) \qquad \begin{aligned}
dx_1 &= \alpha dx + \alpha_1 dy + \alpha_2 dz \\
dy_1 &= \beta dx + \beta_1 dy + \beta_2 dz \\
0 &= \gamma dx + \gamma_1 dy + \gamma_2 dz,
\end{aligned}
$$

deren letzte identisch mit b) ist. Man kann also die Gleichungen 19) differenziren, indem man die Cosinus α, β, γ u. s. w. als constant ansieht, was auch daraus folgt, dass die Ebene der $x_1 y_1$ mit der Ebene der osculirenden Ellipse zusammenfällt.

Wir multipliciren nun wieder die drei letzten Gleichungen der Reihe nach einmal mit α, β, γ, ein andermal mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und ein drittes Mal mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, und addiren, so wird mit Rücksicht auf 21):

$$
\begin{aligned}
dx &= \alpha\, dx_1 + \beta\, dy_1 \\
dy &= \alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 \\
dz &= \alpha_2 dx_1 + \beta_2 dy_1,
\end{aligned}
$$

und wenn wir endlich diese Gleichungen wieder der Reihe nach einmal mit $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ und ein andermal mit $d\beta$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ multipliciren und wieder addiren, so wird nach den Gleichungen 20) und c):

$$
\begin{aligned}
d\alpha dx + d\alpha_1 dy + d\alpha_2 dz &= 0 \\
d\beta dx + d\beta_1 dy + d\beta_2 dz &= 0.
\end{aligned}
$$

Nun differenziren wir die Gleichungen 26) ein zweites Mal und erhalten mit Hilfe der vorigen:

$$
27) \qquad \begin{aligned}
d^2x_1 &= \alpha d^2x + \alpha_1 d^2y + \alpha_2 d^2z \\
d^2y_1 &= \beta d^2x + \beta_1 d^2y + \beta_2 d^2z.
\end{aligned}
$$

Man kann also die Gleichungen 19) zweimal differenziren, indem man die Cosinus α, β, γ u. s. w. als constant ansieht; dies haben wir durch unsere Definition der Lage der x_1-Axe (Gleichung c)) erreicht, welche schon Hansen angewandt hat.

3. Wir können jetzt die Gleichungen 15) in derselben Weise transformiren wie Hansen, indem wir sie der Reihe nach einmal mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ und ein andermal mit β, β_1, β_2 multipliciren und addiren. Wir erhalten dann mit Berücksichtigung von 27) und 19)

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{Mx_1}{r^3} &= M\left[\alpha\frac{\partial\Omega}{dx} + \alpha_1\frac{\partial\Omega}{dy} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{dz}\right] \\
\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{My_1}{r^3} &= M\left[\beta\frac{\partial\Omega}{dx} + \beta_1\frac{\partial\Omega}{dy} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{dz}\right].
\end{aligned}
$$

Da aber nach 18):



$$\alpha = \frac{\partial x}{dx_1}, \qquad \alpha_1 = \frac{\partial y}{dx_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{\partial z}{dx_1}$$

$$\beta = \frac{\partial x}{dy_1}, \qquad \beta_1 = \frac{\partial y}{dy_1}, \qquad \beta_2 = \frac{\partial z}{dy_1},$$

so erhalten wir die Differentialgleichungen für die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene in folgender Gestalt:

$$28)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{Mx_1}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dx_1} \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{My_1}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dy_1}, \end{aligned}$$

also ganz analog den Gleichungen 15).

4. In die Gleichungen 28) führen wir nun Polarcoordinaten ein durch die Relationen:

$$29)\qquad x_1 = r\cos v, \qquad y_1 = r\sin v,$$

wo v der Winkel zwischen der positiven x_1-Axe und dem Radiusvektor (also die wahre Länge des Planeten in seiner momentanen Bahnebene) ist, dieselbe Grösse, welche in den Gleichungen 4) und 5) der Einleitung figurirt. Da die Ebene der $x_1 y_1$ nicht fest im Raume ist, also die vom Planeten beschriebene Curve keine geschlossene ist, so darf man v nicht überall in Perioden von 360° zählen, sondern im Allgemeinen von $-\infty$ bis $+\infty$. Man wird so disponiren, dass v ungefähr in der Mitte des Zeitraums, auf den man die Rechnungen ausdehnt, gleich Null ist.

Aus den Gleichungen 28) leitet man leicht die folgenden ab:

$$30)\qquad x_1\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = M\left[x_1\frac{\partial\Omega}{dy_1} - y_1\frac{\partial\Omega}{dx_1}\right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist Nichts anderes als der Differentialquotient des vom Radiusvektor während des Zeitelements dt beschriebenen Flächenelements nach der Zeit, also gleich:

$$\frac{d}{dt}\left[x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right),$$

und da nach 29)

$$\frac{\partial x_1}{dv} = -y_1, \qquad \frac{\partial y_1}{dv} = x_1,$$

so wird die rechte Seite der Gleichung 30) gleich:

$$M\left[\frac{\partial\Omega}{dy_1}\,\frac{\partial y_1}{dv} + \frac{\partial\Omega}{dx_1}\,\frac{\partial x_1}{dv}\right] = M\frac{\partial\Omega}{dv}.$$

Der partielle Differentialquotient $\frac{\partial \Omega}{dv}$ ist folgendermassen zu verstehen: Durch die Gleichung 16) ist Ω gegeben als Funktion der drei Variabeln x, y, z, wenn wir von den Coordinaten des störenden Körpers absehen, die bei der Differentiation von Ω als Constanten fungiren. In den Gleichungen 28) muss man sich im Ausdruck für Ω die Variabeln x, y, z mit Hilfe von 18) ersetzt denken durch x_1, y_1 und die Cosinus α, β, γ u. s. w., welche zusammen die dritte Variable (z_1 ist gleich Null) vorstellen. Hiernach sind die Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{dx_1}$ und $\frac{\partial \Omega}{dy_1}$ unzweideutig definirt. Führen wir nun nach 29) Polarcoordinaten ein, so wird Ω Funktion der drei Variabeln r, v und der Cosinus α, β, γ u. s. w. oder irgend einer anderen dritten Variabeln, die die Lage der momentanen Bahnebene gegen die feste ausdrückt. Bei Bildung der Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{dv}$ und $\frac{\partial \Omega}{dr}$ sind also die Grössen, die sich auf die Lage beider Ebenen zu einander beziehen, als constant anzusehen; es ist wichtig, dies zu bemerken, da v in den Grössen, welche die Lage beider Ebenen definiren, implicit vorkommt.

Die Gleichung 30) geht also über in:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{dv}{dt}\right) = M \frac{\partial \Omega}{dv}. \tag{31}$$

Ferner leiten wir aus den Gleichungen 28) die folgende ab:

$$x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{M}{r} = M\left[x_1 \frac{\partial \Omega}{dx_1} + y_1 \frac{\partial \Omega}{dy_1}\right]. \tag{32}$$

Da aber

$$\frac{\partial x_1}{dr} = \frac{x_1}{r}, \qquad \frac{\partial y_1}{dr} = \frac{y_1}{r},$$

so wird

$$x_1 \frac{\partial \Omega}{dx_1} + y_1 \frac{\partial \Omega}{dy_1} = r \frac{\partial \Omega}{dr}.$$

Aus den Gleichungen 29) folgt aber:

$$x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Die Gleichung 32) geht also in die folgende über:

$$r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r} = Mr \frac{\partial \Omega}{dr}, \tag{33}$$

welche Gleichung, ebenso wie 31), mit den von Hansen angewandten identisch ist.

5. Wir wollen nun in die Gleichungen 31) und 33), welche die Bewegung

des Planeten in seiner momentanen Bahnebene bestimmen, als abhängige Veränderliche die Gyldén'schen Coordinaten ϱ, η und S, und als unabhängige Veränderliche die wahre Länge v einführen; hierzu dienen uns die Gleichungen 2) und 3), die wir jetzt auf die momentane Bahnebene beziehen:

$$2)\quad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \qquad 3)\quad r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}$$

Die Gleichung 31) geht mit Hilfe von 3) unmittelbar über in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}\right) = M\frac{\partial\Omega}{dv},$$

und wenn man die Differentiation linker Hand ausführt, sowie dt mit Hilfe von 3) durch dv ersetzt, so kommt:

$$34\text{a})\qquad -\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = (1+S)^2 Q + \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv},$$

wo gesetzt ist:

$$34)\qquad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{dv}.$$

Die vorstehende Gleichung wird zur Bestimmung von S dienen.

Um die Differentialgleichung für die Funktion ϱ abzuleiten, bemerken wir, dass wir nach 3) haben:

$$\frac{dr}{dt} = -r^2\frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -\frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}\frac{d\frac{1}{r}}{dv},$$

woraus durch Differentiation sich ergiebt:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{Ma(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\frac{1}{r}}{dv} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\right\},$$

oder mit Rücksicht auf 34):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{Ma(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\right\}.$$

Setzt man diesen Wert ein in die Gleichung 33), und ersetzt man dort $\frac{dv}{dt}$ durch seinen Wert 3), so wird:

$$35)\qquad a(1-\eta^2)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q\frac{d\frac{1}{r}}{dv} + \frac{1}{r}\right\} - (1+S)^2 = -r^2(1+S)^2\frac{\partial\Omega}{dr}.$$

Aus 2) ergeben sich aber durch Differentiation die folgenden Relationen:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dv} = \frac{1}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{d\varrho}{dv} + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}\right\}$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} = \frac{1}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \frac{2}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}\,\frac{d\varrho}{dv} + 2\frac{1+\varrho}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2}\,\frac{d^2\eta^2}{dv^2}\right\},$$

und mit ihrer Hilfe geht Gleichung 35) in die folgende über:

36)
$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q\right\}\frac{d\varrho}{dv} + 2S + S^2 - (1+S)^2 P$$
$$-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}\,Q\,\frac{d\eta^2}{dv}\right\}(1+\varrho),$$

wo wir bezeichnet haben:

36a)
$$P = r^2\frac{\partial\Omega}{dr}.$$

Die vorstehende Gleichung dient uns zur Bestimmung der Funktion ϱ und die in der zweiten Reihe stehenden Glieder können fast immer vernachlässigt werden. Wenn wir die Störungsfunktion und ihre Derivirten P und Q in trigonometrische Reihen entwickeln, so werden offenbar die Gleichungen 34) und 36) auf die Form der oben besprochenen Gleichungen 4) und 5) geführt werden.

Die Integrale der Gleichungen 34) und 36) geben die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene; indessen wird hierzu noch die Integration der Gleichung 3) erfordert, welche wir zu diesem Zweck im Folgenden auf eine etwas andere Form bringen wollen.

6. Wir wollen nun einige Betrachtungen machen über die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene, und wollen die nötigen Formeln herstellen zur Berechnung von r und v für einen gegebenen Wert der Zeit; hierbei soll zugleich die Gleichung 3) auf eine Form gebracht werden, die für ihre Integration von Vorteil ist.

Wir haben mit (ϱ) denjenigen Teil der Funktion ϱ bezeichnet, welcher von der Form B ist, und wenn wir setzen

37)
$$\varrho = (\varrho) + R,$$

so ist die Funktion R offenbar erster Ordnung, wenn sie auch ihrem absoluten Betrage nach erheblich grösser sein kann als die störende Masse.

Sind die Funktionen η, Π und R bekannt, so kann der Radiusvektor aus v berechnet werden mit Hilfe der Relation

38)
$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)+R} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos\mathrm{v}+R},$$



wo gesetzt ist

39) $$\mathrm{v} = v - \Pi.$$

Gyldén definirt den „absoluten Radiusvektor“ (r) durch die Relation

40) $$(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos\mathrm{v}},$$

woraus also folgt:

41) $$r = \frac{(r)}{1+\dfrac{R}{1+\eta\cos\mathrm{v}}}.$$

Wir wollen nun, nach Gyldén, eine neue Variable ε einführen, welche in gewisser Analogie zur excentrischen Anomalie der elliptischen Bewegung steht. Wir setzen nämlich:

42) $$(r) = a(1-\eta\cos\varepsilon).$$

Es wird also:

43) $$1-\eta\cos\varepsilon = \frac{1-\eta^2}{1+\eta\cos\mathrm{v}}, \quad \cos\varepsilon = \frac{\eta+\cos\mathrm{v}}{1+\eta\cos\mathrm{v}}, \quad \sin\varepsilon = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta\cos\mathrm{v}}\sin\mathrm{v},$$

woraus sich ergiebt:

44) $$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebenso führen wir in Analogie mit der elliptischen Bewegung die mittlere Anomalie M ein durch die Gleichung:

45) $$M = \varepsilon - \eta\sin\varepsilon.$$

Man kann nun die Grössen ε und M als Funktionen von v darstellen durch die folgenden Reihen, welche denen der elliptischen Bewegung durchaus entsprechen, und welche wir darum hier nicht besonders ableiten[1]),

$$\varepsilon = \mathrm{v} + \sum A_n \sin n\mathrm{v},$$

wo

$$A_n = 2\frac{(-1)^n}{n}\frac{\eta^n}{(1+\sqrt{1-\eta^2})^n},$$

und

46) $$M = \varepsilon - \eta\sin\varepsilon = \mathrm{v} + \sum B_n \sin n\mathrm{v},$$

wo

$$B_n = 2\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\eta}{1+\sqrt{1-\eta^2}}\right)^n(1+n\sqrt{1-\eta^2}).$$

1) Siehe Tisserand, Traité de Mécanique céleste. Tome I pag. 223.

Wenn man die Ausdrücke für die B_n nach Potenzen von η entwickelt, so erhält man bis zu den Gliedern fünften Grades:

$$
47) \qquad
\begin{aligned}
B_1 &= -2\eta & B_4 &= \tfrac{5}{32}\eta^4 + \cdots\cdots \\
B_2 &= \tfrac{3}{4}\eta^2 - \tfrac{1}{8}\eta^4 + \cdots\cdots & B_5 &= -\tfrac{3}{40}\eta^5 - \cdots\cdots \\
B_3 &= -\tfrac{1}{3}\eta^3 - \tfrac{1}{8}\eta^5 - \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Differenziren wir die Gleichung 46), indem wir η als constant ansehen und das Differential durch den Buchstaben D bezeichnen, so wird:

$$
48) \qquad (1-\eta\cos\varepsilon)\frac{D\varepsilon}{D\mathrm{v}} = 1 + \sum n B_n \cos n\mathrm{v}.
$$

Aus den Gleichungen 43) ergiebt sich aber

$$
\frac{D\varepsilon}{D\mathrm{v}} = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta\cos\mathrm{v}},
$$

und

$$
(1-\eta\cos\varepsilon)\frac{D\varepsilon}{D\mathrm{v}} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2}.
$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in 48) erhält man die Entwicklung

$$
49) \qquad \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2} = 1 + \sum n B_n \cos n\mathrm{v},
$$

von der ich im Folgenden Gebrauch machen werde.

7. Wir kehren nun zurück zur Gleichung 3) (pag. 28) zwischen der wahren Länge v und der Zeit, welche wir schreiben:

$$
\frac{dt}{dv} = \frac{r^2(1+S)}{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}.
$$

Wir setzen

$$
50) \qquad n = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}},
$$

und nennen n die „Bewegungsconstante" des Planeten. Die vorige Relation lässt sich dann, wie folgt, schreiben:

$$
51) \qquad n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho)^2}(1+S),
$$

und diese haben wir zu integriren.

Die mittlere Länge des Planeten L definiren wir durch die Gleichung:

$$
52) \qquad L = nt + \Lambda,
$$

wo Λ Integrationsconstante ist und die mittlere Länge zur Zeit $t = 0$ bezeichnet.

Ferner führen wir die reducirte Zeit (t) ein durch die Relation

53) $$n(t) + \Lambda = M + \Pi.$$

Es wird also nach 46)

54) $$n(t) + \Lambda = v + \sum B_n \sin n\mathrm{v}.\text{[1]}$$

Wenn wir diese letztere Gleichung differenziren und berücksichtigen, dass

$$B_n \sin n\mathrm{v} = B_n \cos n\Pi \sin nv - B_n \sin n\Pi \cos nv,$$

so wird

$$n\frac{d(t)}{dv} = 1 + \sum n B_n \cos n\mathrm{v} + \frac{d\Xi}{dv},$$

wo gesetzt ist

55) $$\frac{d\Xi}{dv} = \sum \frac{d(B_n \cos n\Pi)}{dv} \sin nv - \sum \frac{d(B_n \sin n\Pi)}{dv} \cos nv.$$

Bedenkt man die Entwicklung 49), so hat man endlich:

56) $$n\frac{d(t)}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2} + \frac{d\Xi}{dv}.$$

Wenn wir nun die Differenz zwischen der wahren und der reducirten Zeit durch eine Funktion W darstellen, indem wir setzen:

57) $$nt = n(t) + W,$$

so wird

57a) $$L = nt + \Lambda = v + \sum B_n \sin n\mathrm{v} + W,$$

und

57b) $$\frac{dW}{dv} = n\frac{dt}{dv} - n\frac{d(t)}{dv},$$

oder nach 51) und 56):

58) $$\frac{dW}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2}\left\{\frac{1+S}{\left(1+\frac{R}{1+\eta\cos\mathrm{v}}\right)^2} - 1\right\} - \frac{d\Xi}{dv}.$$

Wenn wir die Entwicklung 49) bedenken, und den vorigen Ausdruck auch nach Potenzen von R und S entwickeln, so erhalten wir zur Bestimmung von W die folgende Differentialgleichung:

---

1) Dass der Buchstabe n hier in zwei verschiedenen Bedeutungen vorkommt, kann wohl zu keinem Missverständniss führen.

59)
$$\frac{dW}{dv} = S - 2R - 2RS + 3R^2 \pm \cdots\cdots$$
$$+ \{6R - 2S - 12R^2 + 6RS \pm \cdots\cdot\} \eta \cos v$$
$$- 3\eta^2 R + \{\tfrac{5}{2}S - 6R \pm \cdots\cdot\} \eta^2 \cos 2v$$
$$\pm \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \frac{d\Xi}{dv}.$$

Wir haben diese Gleichung, welche an Stelle von 3) tritt, hier nur soweit entwickelt, wie sie für die uns vorliegende Aufgabe von Wichtigkeit ist. Man sieht, dass sie vom selben Typus ist, wie die Gleichung 6) für S. Die Integrationsconstante, welche bei ihrer Integration auftritt, werden wir gleich Null setzen, da sie sich mit Λ vereinigt.

8. Die Funktion Ξ ist äusserst klein, und kann fast immer bei Seite gelassen werden; man kann sie aus 55) bestimmen. Die in 55) auftretenden Grössen $B_n \cos n\Pi$ und $B_n \sin n\Pi$ sind von der Form A, ihre Differentiale sind also rein erster Ordnung, und da sie in Gleichung 55) mit $\sin nv$ und $\cos nv$ multiplicirt werden, so ist Ξ von der Form B, und durch die Integration dieser Gleichung werden keine Glieder vergrössert. Ξ ist also rein erster Ordnung und übrigens ersten Grades, also äusserst klein; will man diese Funktion doch bestimmen, so kann man 55) partiell integriren und erhält:

60)
$$\Xi = -\sum \frac{1}{n} \frac{d(B_n \cos n\Pi)}{dv} \cos nv - \sum \frac{1}{n} \frac{d(B_n \sin n\Pi)}{dv} \sin nv$$
$$+ \sum \frac{1}{n} \int \frac{d^2(B_n \cos n\Pi)}{dv^2} \cos nv\, dv + \sum \frac{1}{n} \int \frac{d^2(B_n \sin n\Pi)}{dv^2} \sin nv\, dv.$$

Die in der zweiten Reihe stehenden Glieder werden in allen Fällen vernachlässigt werden können, da die zweiten Differentialquotienten von $B_n \cos n\Pi$ und $B_n \sin n\Pi$ rein zweiter Ordnung sind; auch kann man die partielle Integration fortsetzen, und erhält dann eine sehr stark convergirende Reihe für Ξ.

Indessen lässt sich die Funktion Ξ noch auf eine bequemere Weise bestimmen; die Gleichung 55) lässt sich nämlich folgendermaassen schreiben:

61)
$$\frac{d\Xi}{dv} = \sum \frac{D(B_n \sin nv)}{Dv},$$

wo das Zeichen D bedeutet, dass die Differentiation nur in bezug auf η und Π auszuführen ist, und nicht in bezug auf v, soweit es explicit in $B_n \sin nv$ vorkommt. Man kann diese Gleichung auch schreiben:

$$\frac{d\Xi}{dv} = \sum \left\{ \frac{\partial(B_n \sin nv)}{d\eta} \frac{d\eta}{dv} + \frac{\partial(B_n \sin nv)}{d\Pi} \frac{d\Pi}{dv} \right\}.$$

Doch ist diese Form zur Rechnung nicht geeignet. Zur Integration der Gleichung 61) kann man im Ausdruck $B_n \sin n\mathrm{v}$ mit Hilfe der Gleichungen 10) η und Π durch die Grössen $\varkappa_n$ und ω_n ersetzen, wonach sich die weitere Rechnung sehr einfach gestaltet.

9. Unsere Aufgabe ist jetzt auf die Integration der drei Gleichungen 34), 36) und 59) geführt. Ist diese Integration, von der wir im Folgenden handeln, ausgeführt und sind die Funktionen S, η, Π, R und W bestimmt, so gestaltet sich die Berechnung der Coordinaten r und v folgendermaassen:

Es ergiebt sich die mittlere Länge aus:

62)

$$L = nt + \varDelta,$$

dann die mittlere Anomalie nach den Gleichungen 53) und 57) aus:

$$M = L - \Pi - W,$$

ferner die excentrische Anomalie aus:

$$\varepsilon - \eta \sin \varepsilon = M,$$

und die wahre Anomalie aus:

$$\mathrm{tg}\frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\,\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Die wahre Länge in der Bahn und der Radiusvektor werden dann gefunden mittels der Relationen:

$$62)\quad \begin{cases} v = \mathrm{v} + \Pi \\ (r) = a(1 - \eta \cos \varepsilon) \\ r = \dfrac{(r)}{1 + \dfrac{R}{1 + \eta \cos \mathrm{v}}}.\,^{1)} \end{cases}$$

Es wird angebracht sein, diese Relationen mit den entsprechenden Hansen'schen zu vergleichen; dieselben lauten bekanntlich:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + n\,\delta z$$

$$\bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} = n_0 z$$

$$\mathrm{tg}\frac{\bar{f}}{2} = \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}}\,\mathrm{tg}\frac{\bar{\varepsilon}}{2}$$

---

1) Ich werde im zweiten Teile diesen Relationen noch eine andere Form geben, die sich besser zur praktischen Rechnung eignet.

$$v = \bar{f} + \pi_0$$
$$\bar{r} = a_0(1 - e_0 \cos \bar{\varepsilon})$$
$$r = \bar{r}(1 + \nu).$$

Unsere Funktion W giebt also im Wesentlichen die Hansen'schen Störungen der mittleren Anomalie, also die Grösse $n_0 \delta z$ wieder; doch sind die Störungen der Form B von ihr abgezweigt und durch Einführung der Funktionen η und Π berücksichtigt. Dagegen legen wir unseren Rechnungen durchaus andere Bahnelemente zu Grunde als Hansen. Hansen's Elemente n_0, a_0, e_0, c_0, π_0 sind mit einer gewissen Willkürlichkeit zu wählen; sie sollen gleich den osculirenden elliptischen Elementen in irgend einem Zeitpunkt sein, oder wenigstens überhaupt innerhalb der Grenzen liegen, zwischen denen die osculirenden Elemente schwanken können. Diese Grenzen werden, wie Hansen hervorhebt, allerdings nur um Grössen auseinanderliegen, welche von der Ordnung der störenden Masse sind (wobei natürlich von den secularen Störungen abgesehen ist), aber diese Grössen können ihrem numerischen Betrage nach sehr erheblich sein; sie sind nach unserer Definition nicht rein erster Ordnung. Wenn man also nach der Hansen'schen Methode rechnet, so kann es sich ereignen, dass man die Rechnung mit Voraussetzung von Elementen beginnt, welche zwar innerhalb der festgesetzten Grenzen liegen, aber von den wahren (oder mittleren) Elementen erheblich abweichen. Hierdurch können die Resultate gänzlich entstellt werden, namentlich dann, wenn der angenommene Wert von n_0, aus dem die Integrationsdivisoren bestimmt werden, vom wahren stark abweicht.

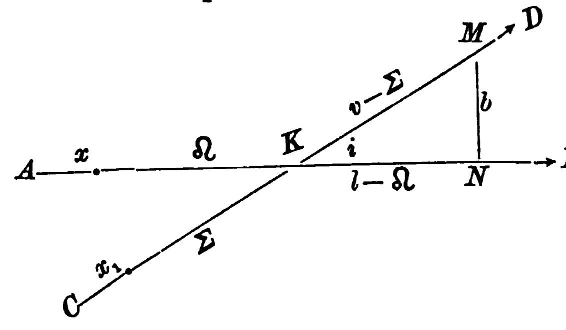
In unseren Formeln sind die Elemente n, a, $\varkappa$, Δ, Γ strenger definirt, und wenn wir stets zu brauchbaren Resultaten kommen wollen, so ist der Spielraum, den man zu ihrer Wahl hat, ausserordentlich klein, jedenfalls viel kleiner als die Schwankungen, denen die osculirenden Elemente ausgesetzt sind.

Drittes Kapitel.

Formeln für die heliocentrische Bewegung des Planeten. — Lage der momentanen Bahnebene zu der als Fundamentalebene gewählten Ekliptik.

1. Nachdem wir im vorigen Kapitel die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene betrachtet haben, wollen wir jetzt seine Position in bezug auf die feste Fundamentalebene behandeln, damit man im Stande ist, seine heliocentrischen und geocentrischen Coordinaten im Raum zu berechnen.

Sei AB der grösste Kreis, in dem die feste Fundamentalebene der xy die um den Schwerpunkt der Sonne mit dem Radius Eins beschriebene Kugelfläche



schneidet, und sei CD der grösste Kreis, in dem die momentane Bahnebene des Planeten diese Kugel schneidet. Sei x der Durchschnittspunkt der x-Axe mit dem Kreise AB und x_1 der Durchschnittspunkt der x_1-Axe mit dem Kreise CD, ferner M der Durchschnittspunkt des Radiusvektors des Planeten mit dem Kreise CD. Fällen wir von M ein Lot auf AB, und nennen seinen Fusspunkt N, so ist xN die Länge und MN die Breite des Planeten in bezug auf die Fundamentalebene, welche Grössen wir durch l und b bezeichnen. Der Pfeil bei B giebt die Richtung der Zählweise von l und der Pfeil bei D die Richtung der Bewegung des Planeten an. Weiter nennen wir K den Schnittpunkt der beiden Kreise AB und CD, also den aufsteigenden Knoten der momentanen Bahnebene und i die Neigung der letzteren. Endlich sei Ω die Länge des aufsteigenden Knotens oder der Bogen xK, sowie Σ der Bogen x_1K. Der Bogen x_1M ist dann die wahre Länge v des Planeten in seiner Bahnebene, und der Bogen KM, d. h. das Argument der Breite, ist gleich $v-\Sigma$.

Aus dem Dreieck KMN folgen die Relationen:

$$\sin b = \sin i \sin(v-\Sigma) \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \cos b \sin(l-\Omega) &= \cos i \sin(v-\Sigma) \\ \cos b \cos(l-\Omega) &= \cos(v-\Sigma) \end{aligned} \tag{65}$$

$$\operatorname{tg}(l-\Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v-\Sigma). \tag{66}$$

Man kann mit Hilfe der dritten der Gleichungen 15) nach einigen Transformationen die Grössen i, Ω und Σ bestimmen, und dann die Coordinaten l und b des Planeten nach den obigen Formeln aus v berechnen. Indessen wird es angebrachter sein, l und b direkt als Funktionen der Zeit oder der Länge v darzustellen.

2. Hiermit wollen wir uns zunächst beschäftigen und erst später die Relationen für die Grössen i, Ω und Σ aufstellen. Die dritte der Gleichungen 15) lautet:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dz}. \tag{67}$$

Es ist aber:

$$z = r \sin b,$$

und wenn wir mit Gyldén bezeichnen

68) $$\mathfrak{z} = \sin b,$$

so wird

$$z = r\mathfrak{z},$$

und die Gleichung 67) geht in die folgende über:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \frac{\mathfrak{z}}{r}\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{M\mathfrak{z}}{r^3} = \frac{M}{r}\frac{\partial\Omega}{dz}.$$

Ersetzen wir $\frac{d^2r}{dt^2}$ durch seinen aus 33) folgenden Wert, so wird:

69) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \mathfrak{z}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{M}{r}\frac{\partial\Omega}{dz} - \frac{M\mathfrak{z}}{r}\frac{\partial\Omega}{dr}.$$

In diese Gleichung führen wir nun wieder die wahre Länge v als unabhängige Veränderliche ein nach Gleichung 3); man hat:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right\},$$

oder mit Berücksichtigung von 34):

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv} + (1+S)^2 Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right\}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2},$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv},$$

und Gleichung 69) geht über in die folgende, welche uns zur Bestimmung von $\mathfrak{z}$ dienen wird:

70) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+S)^2 Z,$$

wo wir bezeichnet haben:

70a) $$Z = \frac{r^3}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{\partial\Omega}{dz} - \mathfrak{z}\frac{\partial\Omega}{dr}\right\}.$$

Diesen Wert von Z wollen wir noch transformiren; man erhält nämlich aus dem Ausdrucke 16) von Ω:

$$\frac{\partial \Omega}{dz} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{z}{\varDelta^3}+z'\left(\frac{1}{\varDelta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right\}$$

und aus dem Ausdruck 17):

$$\frac{\partial \Omega}{dr} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{r}{\varDelta^3}+r'\left(\frac{1}{\varDelta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos H\right\}.$$

Wenn wir b' die Breite des störenden Planeten in bezug auf die Fundamentalebene nennen und

$$\mathfrak{z}' = \sin b'$$

setzen, so wird auch

$$z' = r'\mathfrak{z}',$$

und die Relation 70a) geht mit Hilfe der vorstehenden in die folgende über:

$$71) \qquad Z = \frac{m'}{1+m}\frac{r^2 r'}{a(1-\eta^2)}\left(\frac{1}{\varDelta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)(\mathfrak{z}'-\mathfrak{z}\cos H).$$

Diesen Ausdruck werden wir zur Entwicklung von Z benutzen.

3. Ich will nun einige Bemerkungen machen über die Integration der Gleichung 70) und über die Form, unter der sich die Funktion $\mathfrak{z}$ darstellen wird. Man sieht, dass diese Gleichung vom selben Typus ist wie die Gleichung 36) für ϱ, also auch wie die Gleichung 5). Die Bemerkungen, welche wir über die Integration der letzteren im ersten Kapitel pag. 18 f. gemacht haben, finden demnach auch auf $\mathfrak{z}$ Anwendung. Diese Funktion wird also elementare Glieder der Form B und charakteristische der Form D enthalten.

Wir setzen darum, ähnlich wie für die Funktion ϱ,

$$72) \qquad \mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z},$$

wo $(\mathfrak{z})$ alle Glieder der Form B enthalten soll, und $\mathfrak{Z}$ demnach mit der störenden Masse multiplicirt ist. In $\mathfrak{Z}$ werden sich aber, gerade wie in R, charakteristische Glieder der Form D vorfinden, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahezu commensurabel ist.

Ebenso wie wir für (ϱ) den Ausdruck 8) eingeführt haben, setzen wir $(\mathfrak{z})$ unter die Form:

$$(\mathfrak{z}) = \sin\iota\sin[(1+\tau)v-\Theta]+\sum\sin\iota_n\sin[(1+\tau_n)v-\Theta_n],$$

wo die Grössen ι_n, τ, τ_n, Θ_n Constanten und ι und Θ die beiden Integrationsconstanten sind. τ und die τ_n sind von der Ordnung der störenden Massen.

Wir setzen weiter:

$$73) \qquad \begin{aligned} \vartheta &= \Theta - \tau v \\ \vartheta_n &= \Theta_n - \tau_n v, \end{aligned}$$

wonach also:

74) $$(\mathfrak{z}) = \sin\iota\sin(v-\vartheta)+\sum\sin\iota_n\sin(v-\vartheta_n).$$

Gyldén hat nun zwei Funktionen $\sin j$ und σ eingeführt, welche wie η und Π langperiodischer Natur und von der Form A sind; wir setzen:

75) $$\sin j\,{\cos \atop \sin}\,\sigma = \sin\iota\,{\cos \atop \sin}\,\vartheta+\sum\sin\iota_n\,{\cos \atop \sin}\,\vartheta_n.$$

Es wird dann:

76) $$(\mathfrak{z}) = \sin j\sin(v-\sigma) = \sin j\sin\mathfrak{v},$$

wenn wir nämlich bezeichnen:

77) $$\mathfrak{v} = v-\sigma.$$

Die Funktion σ wird indessen, wie Π, auch einen secularen Teil enthalten und man kann setzen:

78) $$\sigma = \sigma_0-\tau v.$$

Es bestehen dann auch die Relationen:

79) $$\begin{aligned}\sin j\cos\sigma_0 &= \sin\iota\cos\Theta+\sum\sin\iota_n\cos(\vartheta_n+\tau v)\\ \sin j\sin\sigma_0 &= \sin\iota\sin\Theta+\sum\sin\iota_n\sin(\vartheta_n+\tau v)\end{aligned}$$

80) $$\begin{aligned}\sin j\cos(\sigma_0-\Theta) &= \sin\iota+\sum\sin\iota_n\cos(\vartheta_n-\vartheta)\\ \sin j\sin(\sigma_0-\Theta) &= \qquad\quad \sum\sin\iota_n\sin(\vartheta_n-\vartheta),\end{aligned}$$

sowie

81) $$\sin^2 j = (\mathfrak{z})^2+\left(\frac{D(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2,$$

wo das Zeichen D bedeutet, dass bei der Differentiation die Grössen ϑ und ϑ_n als constant anzusehen sind.

Die Funktion $\sin j$ und die Grössen $\sin\iota$ und $\sin\iota_n$ werden ihrem Betrage nach vergleichbar sein mit den Neigungssinus der momentanen Bahnebenen der Planeten gegen die Ekliptik und wir werden sie, ebenso wie η und die $\varkappa_n$ als Grössen vom ersten Grade bezeichnen; ein jedes Glied, dass die n-te Potenz einer dieser Grössen oder ein äquivalentes Produkt enthält, wird also vom n-ten Grade sein.

4. Das Integral der Gleichung 70) giebt uns die Breite des gestörten Planeten, da $\mathfrak{z} = \sin b$; ich will nun auch den Ausdruck für die Länge l aufstellen. Wenn wir die Gleichung 66) differenziren und dabei nach dem Principe der Osculation i, Ω und Σ als constant ansehen, so kommt:

$$\frac{dl}{dv} = \cos i\,\frac{\cos^2(l-\Omega)}{\cos^2(v-\Sigma)}.$$

Aus dem Dreieck MNK in der Figur pag. 36 folgt aber:

$$\cos(v-\Sigma) = \cos b \cos(l-\Omega),$$

also wird

82) $$\frac{dl}{dv} = \frac{\cos i}{\cos^2 b},$$

in welcher Gleichung wir noch i und b durch $\mathfrak{z}$ und $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ ersetzen wollen; wir können die Gleichung

83) $$\mathfrak{z} = \sin b = \sin i \sin(v-\Sigma)$$

differenziren, indem wir wieder i und Σ als constant ansehen uud erhalten:

83a) $$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos(v-\Sigma).$$

Es folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

84) $$\sin^2 i = \mathfrak{z}^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2,$$

also auch

85) $$\cos i = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}.$$

Die Gleichung 82) geht also in die folgende über:

$$\frac{dl}{dv} = \frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}}{1-\mathfrak{z}^2},$$

oder integrirt:

86) $$l = v + \int\left\{\frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}}{1-\mathfrak{z}^2} - 1\right\} dv.$$ [1)]

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen kann nach Potenzen von $\mathfrak{z}^2$ und $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2$ entwickelt werden, da $\mathfrak{z}$ vom ersten Grade ist, und es wird:

87) $$l = v + \tfrac{1}{2}\int\left\{\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right\} dv \pm \cdots\cdots,$$

wo ich die Glieder vom vierten Grade ab vernachlässigt habe, da sie meist äusserst klein sind.

1) Vgl. Harzer, Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg. VII. Série. Tome XXXIV, No. 12, pag. 22.

Die Relation 87) enthält eine überzählige Integrationsconstante; wir setzen sie gleich Null, bestimmen sie also so, dass $l = v$ wird, wenn $i = 0$, oder, was dasselbe ist, wenn $\mathfrak{z} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = 0$ ist. Hierdurch ist auch die Integrationsconstante der Gleichungen c_1) und c_2) (pag. 24) bestimmt, welche die Lage der x_1-Axe für einen bestimmten Zeitpunkt giebt.

Nach dem Vorigen werden sich die Längen l und v, und ebenso die Knotenlängen Ω und Σ von einander nur um Grössen zweiten Grades unterscheiden.

5. Die Integration der Gleichung 87) ist leicht auszuführen; indessen muss bedacht werden, dass die Integrale $\int \mathfrak{z}^2 dv$ und $\int \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 dv$ ausserordentlich grosse Glieder von der Form A enthalten, die sich in der Differenz $\int \left\{\mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right\} dv$ herausheben. Ich will darum den Ausdruck für die letztere analytisch ableiten, damit das Auftreten dieser grossen Glieder in den numerischen Rechnungen vermieden werde.

Wenn wir der Kürze halber bezeichnen:

$$\nu_1 = \sin j \cos \sigma, \qquad \nu_2 = \sin j \sin \sigma, \tag{88}$$

so sind offenbar ν_1 und ν_2 elementare Grössen von der Form A, welche bei jeder Differentiation einen der Faktoren τ_n erhalten.

Es wird

$$\begin{aligned} (\mathfrak{z}) &= \nu_1 \sin v - \nu_2 \cos v \\ \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} &= \nu_1 \cos v + \nu_2 \sin v + \frac{d\nu_1}{dv} \sin v - \frac{d\nu_2}{dv} \cos v. \end{aligned} \tag{89}$$

Aus dieser Gleichung leitet man die folgende ab, mit Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung, die wohl in keinem Falle merklich werden dürften:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{z})^2 - \left(\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2 = &-(\nu_1^2 - \nu_2^2)\cos 2v - 2\nu_1\nu_2 \sin 2v \\ &- \left\{\nu_1 \frac{d\nu_1}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_2}{dv}\right\} \sin 2v + \left\{\nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} + \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv}\right\} \cos 2v \\ &+ \nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv}, \end{aligned}$$

oder integrirt:

$$\int \left\{(\mathfrak{z})^2 - \left(\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2\right\} dv = -\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \sin 2v + \nu_1 \nu_2 \cos 2v + \int \left\{\nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv}\right\} dv.$$



Mit Berücksichtigung von 88) geht diese Relation aber über in:

$$\text{90)}\qquad \int\left\{(\mathfrak{z})^2-\left(\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2\right\}dv = -\tfrac{1}{2}\sin^2 j\sin 2v+\int\left\{\nu_1\frac{d\nu_2}{dv}-\nu_2\frac{d\nu_1}{dv}\right\}dv.$$

Wir wollen nun die Integrale rechter Hand in dieser Gleichung ausführen. Es ist nach 88) und 75):

$$\text{91)}\qquad \begin{aligned}\frac{d\nu_1}{dv} &= \tau\sin\iota\sin\vartheta+\sum\tau_n\sin\iota_n\sin\vartheta_n\\ \frac{d\nu_2}{dv} &= -\tau\sin\iota\cos\vartheta-\sum\tau_n\sin\iota_n\cos\vartheta_n,\end{aligned}$$

und demnach:

$$\begin{aligned}\nu_1\frac{d\nu_2}{dv}-\nu_2\frac{d\nu_1}{dv} = &-\tau\sin^2\iota-\sum\tau_n\sin^2\iota_n\\ &-(\tau+\tau_1)\sin\iota\sin\iota_1\cos(\vartheta_1-\vartheta)-(\tau+\tau_2)\sin\iota\sin\iota_2\cos(\vartheta_2-\vartheta)-(\tau+\tau_3)\sin\iota\sin\iota_3\cos(\vartheta_3-\vartheta)-\cdots\\ &-(\tau_1+\tau_2)\sin\iota_1\sin\iota_2\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)-(\tau_1+\tau_3)\sin\iota_1\sin\iota_3\cos(\vartheta_3-\vartheta_1)-\cdots\\ &-(\tau_2+\tau_3)\sin\iota_2\sin\iota_3\cos(\vartheta_3-\vartheta_2)-\cdots\\ &-\cdots,\end{aligned}$$

und die Integration dieses Ausdrucks führt zu elementaren Gliedern zweiten Grades.

Wir können endlich nach dem Vorigen die Gleichung 87), wie folgt, schreiben:

$$\text{92)}\qquad l = v-\tfrac{1}{4}\sin^2 j\sin 2v+H_1+H_2,$$

wo

$$\begin{aligned}\text{93)}\quad H_1 = &-\tfrac{1}{2}\left\{\tau\sin^2\iota+\sum\tau_n\sin^2\iota_n\right\}v\\ &-\tfrac{1}{2}\frac{\tau+\tau_1}{\tau-\tau_1}\sin\iota\sin\iota_1\sin(\vartheta_1-\vartheta)-\tfrac{1}{2}\frac{\tau+\tau_2}{\tau-\tau_2}\sin\iota\sin\iota_2\sin(\vartheta_2-\vartheta)-\cdots\cdots\\ &-\tfrac{1}{2}\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\sin\iota_1\sin\iota_2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)-\cdots\cdots\\ &-\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\text{93a)}\qquad \frac{dH_2}{dv} = (\mathfrak{z})\mathfrak{Z}-\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}^2-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2,$$

und wo die Funktion H_2 fast immer vernachlässigt werden kann. Für diejenigen Planeten, für welche dies nicht der Fall ist, weil $\mathfrak{Z}$ beträchtlich wird, werde ich übrigens im zweiten Teile die Relation für l in etwas veränderter Form aufstellen.

Die Funktion H_1 enthält ein seculares Glied, das allerdings während eines kürzeren Zeitraums unmerklich klein bleibt; dies Glied findet sich also in der

Differenz $l-v$ und, wie wir gleich sehen werden, auch in der Differenz $\Omega-\Sigma$. Man kann es natürlich zum Verschwinden bringen, und zwar am einfachsten dadurch, dass man die Lage der x_1-Axe so wählt, dass Ω gleich Σ wird; dann gelten aber die Bedingungen c_1) und c_2) des zweiten Kapitels nicht mehr, und unsere übrigen Differentialgleichungen würden sich wesentlich compliciren.

6. Es sollen nun die Ausdrücke für die Funktionen i, Ω und Σ hergeleitet werden, für den Fall, dass man die Lage der momentanen Bahnebene bestimmen will.

Wir haben oben schon die Gleichung 84)

$$\sin^2 i = \mathfrak{z}^2+\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2$$

gefunden, aus der i berechnet werden kann. Ich will jedoch noch eine zweckmässigere Relation ableiten. Wenn man nämlich von den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{z} = \sin i \sin(v-\Sigma) \qquad \text{und} \qquad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos(v-\Sigma),$$

die erste mit $\sin v$, die zweite mit $\cos v$ multiplicirt, und addirt, so wird:

$$\sin i \cos\Sigma = \mathfrak{z}\sin v+\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\cos v, \tag{94}$$

und wenn man die erste mit $-\cos v$, die zweite mit $\sin v$ multiplicirt und wieder addirt, so wird:

$$\sin i \sin\Sigma = -\mathfrak{z}\cos v+\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\sin v. \tag{95}$$

Diese Relationen dienen zur Bestimmung von i und Σ; man kann sie noch weiter transformiren mit Hilfe von 89) und 88) und erhält dann mit Vernachlässigung der Glieder rein erster Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} \sin i \cos\Sigma &= \sin j \cos\sigma+\mathfrak{Z}\sin v+\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\cos v \\ \sin i \sin\Sigma &= \sin j \sin\sigma-\mathfrak{Z}\cos v+\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin v. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

In den Fällen, wo $\mathfrak{Z}$ nicht sehr gross ist oder wo es sich nicht um sehr grosse Genauigkeit handelt, setzt man einfach:

$$i = j \qquad \text{und} \qquad \Sigma = \sigma. \tag{97}$$

Zur Berechnung der Knotenlänge Ω endlich will ich die Gleichungen 65) benutzen. Multipliciren wir die erste mit $-\cos(v-\Sigma)$, die zweite mit $\sin(v-\Sigma)$ und addiren wir, so wird:

$$\sin(v-l\pm\Omega-\Sigma) = \frac{1-\cos i}{\cos b}\sin(v-\Sigma)\cos(v-\Sigma).$$

Da man aber hat:

$$\cos b = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}, \qquad \sin(v-\Sigma) = \frac{\mathfrak{z}}{\sin i}, \qquad \cos(v-\Sigma) = \frac{\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sin i},$$

so wird:

$$\sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{1}{1+\cos i}\;\frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}},$$

oder endlich mit Hilfe von 85):

$$\text{98)} \qquad \sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}\left\{1+\sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}\right\}},$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades:

$$\text{99)} \qquad \Omega-\Sigma = \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}+(l-v).$$

Aus dieser Gleichung lässt sich durch Differentiation und Vergleichung mit 87) auch die folgende ableiten:

$$\text{99a)} \qquad \frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z}\right\},$$

welche man natürlich auch direkt finden kann. Wir wollen indessen die Form 99) beibehalten, und da bis auf Glieder rein erster Ordnung:

$$(\mathfrak{z})\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \tfrac{1}{2}\sin^2 j\sin 2\mathfrak{v},$$

so erhalten wir mit derselben Genauigkeit nach 92):

$$\text{100a)} \qquad \Omega-\Sigma = \mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{z})\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv},$$

oder nach einer unschwer auszuführenden Transformation:

$$\text{100b)} \qquad \Omega-\Sigma = \mathrm{H}_1+\tfrac{1}{2}\int\left\{(\mathfrak{z})\left[\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right]+\mathfrak{Z}\left[\frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2}+(\mathfrak{z})\right]+\mathfrak{Z}\left[\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right]\right\}dv,$$

wofür man in fast allen Fällen setzen kann:

$$\text{100c)} \qquad \Omega-\Sigma = \mathrm{H}_1.$$

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Störungsfunktion Ω und ihrer partiellen Ableitungen Q, P und Z.

1. Zur Integration der Differentialgleichungen 34) und 36) brauchen wir die Funktionen Q und P, welche jetzt entwickelt werden sollen. Die Störungsfunktion Ω ist durch die Gleichung 17) gegeben; wir multipliciren sie mit der Halbaxe a, die durch die Relation 2) eingeführt wurde und haben:

$$101)\qquad a\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{\Delta} - \frac{ar}{r'^2}\cos H\right\},\ \text{wo}\ \Delta = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}.$$

Ich will zunächst den Ausdruck $\cos H$ transformiren, der sowohl implicit in Δ als auch explicit vorkommt und zwar soll er nach Potenzen der Neigungen entwickelt werden.

Bekanntlich ist Tisserand[1]) der erste gewesen, welcher eine Entwicklung der Störungsfunktion gegeben hat, die auch bei grossen Bahnneigungen brauchbar bleibt. Ich wende dasselbe Princip an, wie Tisserand und Gyldén, und die Hauptzüge der folgenden Entwicklung wird man auch in Gyldén's „Traité des Orbites absolues“ (Tome I. Livre II. Chap. II und Livre III. Chap. II.) vorfinden. Da wir die Glieder dritten Grades hier vernachlässigen, so können wir unsere Entwicklungen äusserst einfach gestalten.

Es ist bekanntlich:

$$\cos H = \frac{xx'+yy'+zz'}{rr'},$$

welche Relation übrigens durch Vergleichung von 16) und 17) verificirt werden kann. Mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r\cos b\cos l & \qquad x' &= r'\cos b'\cos l' \\ y &= r\cos b\sin l & \qquad y' &= r'\cos b'\sin l' \\ z &= r\sin b, & \qquad z' &= r'\sin b', \end{aligned}$$

wo sich die mit einem Accent versehenen Grössen auf den störenden Körper beziehen, findet man:

$$\cos H = \cos b\cos b'\cos(l-l') + \sin b\sin b'.$$

1) Tisserand, Développement de la fonction perturbatrice etc. Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires, Tome XV. — Und Traité de Mécanique Céleste. Tome I. Kapitel XXVIII. — Siehe auch Backlund, Zur Entwicklung der Störungsfunktion. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. VII. Série. Tome XXXII. No. 4.



Bedenkt man die Relationen:

$$\mathfrak{z} = \sin b \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{z}' = \sin b',$$

so wird:

102) $$\cos H = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}\,\sqrt{1-\mathfrak{z}'^2}\cos(l-l') + \mathfrak{z}\mathfrak{z}',$$

oder wenn man nach Potenzen von $\mathfrak{z}^2$ und $\mathfrak{z}'^2$ entwickelt und die Grössen vierten Grades fortlässt:

103) $$\cos H = \cos(l-l') - \frac{\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2}{2}\cos(l-l') + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Die Gleichung 99) giebt nun aber mit derselben Genauigkeit:

$$l = v + (\Omega - \Sigma) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv},$$

und da man für den störenden Körper ganz ähnlich hat:

$$l' = v' + (\Omega' - \Sigma') - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'},$$

so kommt:

$$l - l' = v - v' + (\Omega - \Sigma) - (\Omega' - \Sigma') - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}.$$

Ich führe der grösseren Bequemlichkeit halber die Bezeichnungen:

103a) $$\Omega - \Sigma = \mathrm{H}, \qquad \Omega' - \Sigma' = \mathrm{H}'$$

ein und setze

104) $$H_1 = v - v' + \mathrm{H} - \mathrm{H}'.$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen, wieder mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades:

$$\cos(l-l') = \cos H_1 + \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\sin H_1.$$

Schreiben wir nun Gleichung 103) folgendermassen, wie schon Gyldén gethan hat:

105) $$\cos H = \cos H_1 + h,$$

so ist die Funktion h mit Fortlassung der Glieder vierten Grades, wie folgt, gegeben:

106) $$h = -\frac{\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2}{2}\cos H_1 + \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\sin H_1 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Den Wert 105) für $\cos H$ führen wir in die Gleichung 101) ein, indem wir nach Potenzen von h entwickeln; wenn wir bezeichnen:

107) $$(\varDelta) = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H_1}$$

108) $$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{(\varDelta)}-\frac{ar}{r'^2}\cos H_1\right\},$$

so ist offenbar nach Fortlassung von h^2, welches vierten Grades ist:

109) $$a\Omega = a(\Omega)+\frac{ad(\Omega)}{d\cos H_1}h,$$

wo bei der Differentiation natürlich r und r' als constant anzusehen sind. Wir haben also die beiden Ausdrücke $a(\Omega)$ und $\frac{ad(\Omega)}{d\cos H_1}$ zu entwickeln.

2. Zur Entwicklung von

108) $$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{(\varDelta)}-\frac{ar}{r'^2}\cos H_1\right\}$$

setzen wir:

110) $$\frac{a}{(\varDelta)} = R_0+2R_1\cos H_1+2R_2\cos 2H_1+\cdots\cdots,$$

und haben nach Fourier's Theorem:

$$R_n = \frac{a}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}}.$$

Wenn es sich um Störungen der kleinen Planeten durch Jupiter handelt, so ist beständig r' grösser als r, und wir schreiben:

$$R_n = \frac{a}{\pi}\frac{1}{r'}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2-2\frac{r}{r'}\cos\psi}}.$$

Wir stellen nun den Radiusvektor r' des störenden Planeten in ganz derselben Weise dar, wie den des gestörten und setzen in Analogie mit der Relation 2)

111) $$r' = \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\varrho'},$$

wo a' die Halbaxe der Bahn des störenden Planeten ist, eine Grösse, die, ebenso wie die Funktionen ϱ' und η' als bekannt angenommen wird. η' ist von der Ordnung der Excentricität des störenden Körpers und wir bezeichnen diese Funktion ebenso wie η als eine Grösse ersten Grades. Im allgemeinen wird

man, wie schon oben bemerkt, an Stelle der Gleichung 111) einfach die Gleichung der Ellipse setzen können.

Es soll ferner, wie gewöhnlich, bezeichnet werden:

112) $$\alpha = \frac{a}{a'},$$

so dass α in den von uns behandelten Fällen kleiner als Eins ist. Wir setzen weiter

113) $$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - \lambda,$$

und dann ist λ offenbar, nach 2) und 111) von derselben Grössenordnung wie ϱ und ϱ' ist; es wird:

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \alpha^2(1-\lambda),$$

und wir können R_n in der folgenden Form schreiben:

114) $$R_n = \frac{a}{\pi}\frac{1}{r'}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}},$$

wo wir zur Abkürzung

$$k = \alpha\sqrt{1-\lambda} = \frac{r}{r'}$$

gesetzt haben. Das Integral 114) lässt sich mit Hilfe einiger bekannter Sätze auf eine geeignetere Form bringen; da wir in der nächsten No. eine ähnliche Umformung vorzunehmen haben, so soll dieselbe gleich hier in allgemeinerer Form angesetzt werden.

Nach Jacobi ist nämlich[1]):

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{m}{2}}} = \frac{m(m+2)\cdots\cdot[m+2(n-1)]}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2n-1)} k^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{n+\frac{m}{2}}},$$

und auf die rechte Seite dieser Relation kann man die Landen'sche Transformation anwenden, indem man setzt:

$$\cos\psi = k\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

woraus folgt:

1) Siehe Gyldén, Traité analytique des Orbites absolues des 8 Planètes principales. Tome I. pag. 394.

$$\sin\psi = \sin\varphi\left\{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-k\cos\varphi\right\}$$

$$\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-k\cos\varphi = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+k\cos\varphi}{1-k^2}$$

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

und hiermit geht die Jacobi'sche Relation über in:

$$115)\quad \int_0^\pi \frac{\cos n\psi\,d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{m}{2}}} = \frac{m(m+2)\cdots\cdots[m+2(n-1)]}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}\,\frac{k^n}{(1-k^2)^{m-1}}\int_0^\pi\left\{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+k\cos\varphi\right\}^{m-1}\frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Diese Transformation können wir anwenden auf das Integral rechter Hand der Gleichung 114), indem wir $m = 1$ annehmen und erhalten:

$$R_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{a'}{r'}\,\alpha^{n+1}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}.$$

Da dies Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ denselben Wert hat, wie zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und π, so wird, wenn wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen etwas anders schreiben:

$$\frac{1}{\pi}\alpha^{n+1}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}\alpha^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2\lambda\sin^2\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}}.$$

Jetzt entwickeln wir endlich das Integral nach Potenzen von λ, und erhalten folgende Reihe:

$$116)\quad \frac{1}{\pi}\alpha^{n+1}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}} = \gamma_{n\cdot0}-\gamma_{n\cdot1}\lambda+\gamma_{n\cdot2}\lambda^2-+\cdots\cdots,$$

wo wir nach Gyldén's Vorgang bezeichnen:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$$

$$117)\quad \gamma_{n\cdot0} = \alpha^{n+1}\beta_n^{(1)},\qquad \gamma_{n\cdot1} = \tfrac{1}{2}\alpha^{n+3}\beta_{n+1}^{(3)},\qquad \gamma_{n\cdot2} = \tfrac{3}{8}\alpha^{n+5}\beta_{n+2}^{(5)}$$

$$\gamma_{n\cdot\sigma} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\sigma-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\sigma}\,\alpha^{n+2\sigma+1}\beta_{n+\sigma}^{(2\sigma+1)},$$

und hiermit wird:

118) $$R_n = \frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\{\gamma_{n\cdot 0}-\gamma_{n\cdot 1}\lambda+\gamma_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\}.$$

Die Coefficienten $\gamma_{n\cdot\sigma}$ hängen nur von dem Verhältnisse α ab, und sind ohne Schwierigkeiten zu berechnen. Für die $\beta_n^{(s)}$ hat bereits Masal[1]) Tafeln hergestellt, aus denen man mit $\log\alpha$ als Argument diese Coefficienten entnehmen kann, und ähnliche Tafeln für die $\gamma_{n\cdot\sigma}$ hat Gyldén kurz vor seinem Tode fertiggestellt[2]).

Nun ist nach 108)

$$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{(\varDelta)}-\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\cos H_1\right\};$$

es kommt also:

$$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{R_0+\left[2R_1-\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right]\cos H_1+2R_2\cos 2H_1+\cdots\right\}.$$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} a(\Omega) &= \Omega_0+2\Omega_1\cos H_1+2\Omega_2\cos 2H_1+\cdots \\ &= 2\sum{}'\Omega_n\cos nH_1, \end{aligned}$$

wo der Accent am $\sum$-Zeichen bedeutet, dass im ersten Gliede der Reihe (für $n = 0$) der Faktor 2 zu unterdrücken ist; man hat also:

$$\Omega_n = \frac{m'}{1+m}R_n$$

für alle Werte von n, mit Ausnahme von $n = 1$, wo zu setzen ist:

$$\Omega_1 = \frac{m'}{1+m}\left\{R_1-\frac{1}{2}\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Bezeichnet man

119) $$\bar{\gamma}_{1\cdot 0} = \gamma_{1\cdot 0}-\frac{\alpha^2}{2},$$

so ist

$$\Omega_n = \frac{m'}{1+m}\frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\left\{\bar{\gamma}_{n\cdot 0}-\gamma_{n\cdot 1}\lambda+\gamma_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\right\},$$

wo

$$\bar{\gamma}_{n\cdot 0} = \gamma_{n\cdot 0}$$

---

1) Hans Masal, Tables de l'Intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$. Astronomiska Iakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Band IV. Heft 5.

2) Gyldén, Hülfstafeln. Publication der astronomischen Gesellschaft. No. XXI.

zu nehmen ist, mit Ausnahme des Wertes $n = 1$, für den die Relation 119) gilt.

In der letzteren Gleichung für Ω_n sollen λ und r' durch die Grössen ϱ, ϱ', η und η' ersetzt werden, nach deren Potenzen wir die Ω_n entwickeln.

Man hat

$$\lambda = 1-\left(\frac{1-\eta^2}{1+\varrho}\right)^2\left(\frac{1+\varrho'}{1-\eta'^2}\right)^2,$$

oder wenn man entwickelt und die Glieder dritten Grades noch berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 2\varrho-2\varrho' \\
&\quad -3\varrho+4\varrho\varrho'-\varrho'^2+2\eta^2-2\eta'^2 \\
&\quad +4\varrho^3-6\varrho^2\varrho'+2\varrho\varrho'^2-4\varrho\eta^2+4\varrho'\eta^2+4\varrho\eta'^2-4\varrho'\eta'^2 \\
\lambda^2 &= 4\varrho^2-8\varrho\varrho'+4\varrho'^2 \\
&\quad -12\varrho^3+28\varrho^2\varrho'-20\varrho\varrho'^2+4\varrho'^3+8\varrho\eta^2-8\varrho\eta'^2-8\varrho'\eta^2-8\varrho'\eta'^2 \\
\lambda^3 &= 8\varrho^3-24\varrho^2\varrho'-24\varrho\varrho'^2-8\varrho'^3.
\end{aligned} \tag{120}$$

Ferner bildet man leicht:

$$\begin{aligned}
\frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}} &= \frac{(1+\varrho')^{n+1}}{(1+\varrho)^n}\,\frac{(1-\eta^2)^n}{(1-\eta'^2)^{n+1}} \\
&= 1-n\varrho+(n+1)\varrho' \\
&\quad +\frac{n(n+1)}{2}\varrho^2-(n+1)\varrho\varrho'+\frac{n(n+1)}{2}\varrho'^2-n\eta^2-(n+1)\eta'^2 \\
&\quad -\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\varrho^3+\frac{n(n+1)^2}{2}\varrho^2\varrho'-\frac{n^2(n+1)}{2}\varrho\varrho'^2+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\varrho'^3 \\
&\quad +n^2\varrho\eta^2-n(n+1)\varrho'\eta^2-n(n+1)\varrho\eta'^2+(n+1)^2\varrho'\eta'^2.
\end{aligned} \tag{120a}$$

Diese Werte führen wir ein in den obigen Ausdruck für Ω_n, und setzen:

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\,\Omega_{(n.s.s')\nu.\nu'}\,\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} \\
a(\Omega) &= 2\Sigma\,\Omega_{(n.s.s')\nu.\nu'}\,\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1,
\end{aligned} \tag{121}$$

wo ich statt des fünffachen Σ-Zeichens ein einfaches gesetzt habe, und wo der Faktor 2 für $n = 0$ zu unterdrücken ist.

Dann wird, wenn wir der Kürze halber in den rechten Seiten der folgenden Relationen[1]) den Faktor $\frac{m'}{1+m}$ fortlassen, und wenn wir die Indices ν und ν',

1) Siehe auch die pag. 24 citirte Abhandlung von Herrn Harzer, wo indessen für $\nu = 1$ die Ω-Coefficienten anderes Vorzeichen haben.

da wo sie beide gleich Null sind, ebenfalls fortlassen, also stets $\Omega_{n.s.s'}$ schreiben für $\Omega_{(n.s.s')00}$:

122)
$$\Omega_{n.0.0} = \bar{\gamma}_{n\cdot 0}$$

$$\Omega_{n.1.0} = -n\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2\gamma_{n\cdot 1}$$
$$\Omega_{n.0.1} = (n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 2\gamma_{n\cdot 1}$$

$$\Omega_{n.2.0} = \frac{n(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (2n+3)\gamma_{n\cdot 1} + 4\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{n.1.1} = -n(n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2(2n+3)\gamma_{n\cdot 1} - 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{n.0.2} = \frac{n(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (2n+3)\gamma_{n\cdot 1} + 4\gamma_{n\cdot 2}$$

$$\Omega_{(n.0.0)1\cdot 0} = -n\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2\gamma_{n\cdot 1}$$
$$\Omega_{(n.0.0)0\cdot 1} = (n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 2\gamma_{n\cdot 1}$$

$$\Omega_{n.3.0} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - (n+2)^2\gamma_{n\cdot 1} - 4(n+3)\gamma_{n\cdot 2} - 8\gamma_{n\cdot 3}$$
$$\Omega_{n.2.1} = \frac{n(n+1)^2}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (3n^2+10n+9)\gamma_{n\cdot 1} + 4(3n+8)\gamma_{n\cdot 2} + 24\gamma_{n\cdot 3}$$
$$\Omega_{n.1.2} = -\frac{n^2(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - (3n^2+8n+6)\gamma_{n\cdot 1} - 4(3n+7)\gamma_{n\cdot 2} - 24\gamma_{n\cdot 3}$$
$$\Omega_{n.0.3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (n+1)^2\gamma_{n\cdot 1} + 4(n+2)\gamma_{n\cdot 2} + 8\gamma_{n\cdot 3}$$

$$\Omega_{(n.1.0)1\cdot 0} = n^2\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 4(n+1)\gamma_{n\cdot 1} + 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{(n.0.1)1\cdot 0} = -n(n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2(2n+3)\gamma_{n\cdot 1} - 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{(n.1.0)0\cdot 1} = -n(n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2(2n+3)\gamma_{n\cdot 1} - 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{(n.0.1)0\cdot 1} = (n+1)^2\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 4(n+2)\gamma_{n\cdot 1} + 8\gamma_{n\cdot 2}.$$

Man beachte die Beziehungen:

122a)
$$\Omega_{n.0.1} = -\Omega_{n\cdot 1\cdot 0} + \Omega_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$\Omega_{n.1.1} = -2\Omega_{n\cdot 2\cdot 0}$$
$$\Omega_{n.0.2} = \Omega_{n\cdot 2\cdot 0}$$

$$\Omega_{(n.0.0)1\cdot 0} = \Omega_{n\cdot 1\cdot 0}$$
$$\Omega_{(n.0.0)0\cdot 1} = \Omega_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{n.2.1} &= -3\Omega_{n\cdot 3\cdot 0}-\Omega_{n\cdot 2\cdot 0}\\
\Omega_{n.1.2} &= 3\Omega_{n\cdot 3\cdot 0}+2\Omega_{n\cdot 2\cdot 0} = -\Omega_{n\cdot 2\cdot 1}+\Omega_{n\cdot 2\cdot 0}\\
\Omega_{n.0.3} &= -\Omega_{n\cdot 3\cdot 0}-\Omega_{n\cdot 2\cdot 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{(n.1.0)_{1\cdot 0}} &= -\Omega_{n\cdot 1\cdot 1}+\Omega_{n\cdot 1\cdot 0}\\
\Omega_{(n.0.1)_{1\cdot 0}} &= \Omega_{n\cdot 1\cdot 1}\\
\Omega_{(n.1.0)_{0\cdot 1}} &= \Omega_{n\cdot 1\cdot 1}\\
\Omega_{(n.0.1)_{0\cdot 1}} &= -\Omega_{n\cdot 1\cdot 1}+\Omega_{n\cdot 0\cdot 1}.
\end{aligned}
$$

3. Wir wollen nun den Ausdruck $\frac{ad(\Omega)}{d\cos H_1}$ entwickeln. Nach 108) und 107) ist:

$$
\frac{ad(\Omega)}{d\cos H_1} = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{arr'}{(\varDelta)^3}-\frac{ar}{r'^2}\right\}. \tag{123}
$$

Wir setzen:

$$
\frac{arr'}{(\varDelta)^3} = \overline{R}_0+2\overline{R}_1\cos H_1+2\overline{R}_2\cos 2H_1+\cdots,
$$

und haben nach dem Fourier'schen Theorem

$$
\overline{R}_n = \frac{arr'}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\psi d\psi}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\psi)^{\frac{3}{2}}},
$$

und, wenn wir wieder $\frac{r}{r'}$ mit k bezeichnen, sowie die Bezeichnung 112) anwenden, so wird:

$$
\overline{R}_n = \frac{1}{\pi}\frac{a'}{r'}\alpha k\int_0^{\pi}\frac{\cos n\psi d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}.
$$

Wir erinnern uns nun der Transformationsformel 115), in der wir $m = 3$ zu setzen haben, und erhalten

$$
\overline{R}_n = \frac{2n+1}{\pi}\frac{a'}{r'}\frac{\alpha k^{n+1}}{(1-k^2)^2}\left\{(1+k^2)\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-2k^2\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2(n+1)}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+2k\int_0^{\pi}\sin^{2n}\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right\}.
$$

Das letzte dieser drei Integrale ist gleich Null, und es wird also:

$$
\overline{R}_n = \frac{2n+1}{\pi}\frac{a'}{r'}\frac{\alpha^{n+2}(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2}\left\{(1+\alpha^2-\alpha^2\lambda)\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}-2\alpha^2(1-\lambda)\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2(n+1)}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}\right\}.
$$

Wenn wir jetzt aber die Formel 116) bedenken, so können wir schreiben:

$$124)\qquad \overline{R}_n = (2n+1)\frac{a'}{r'}\frac{\alpha(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2}\{\xi_{n\cdot 0}-\xi_{n\cdot 1}\lambda+\xi_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\},$$

wo

$$125)\qquad \begin{aligned} \xi_{n\cdot 0} &= (1+\alpha^2)\gamma_{n\cdot 0}-2\alpha\gamma_{n+1\cdot 0} \\ \xi_{n\cdot 1} &= (1+\alpha^2)\gamma_{n\cdot 1}+\alpha^2\gamma_{n\cdot 0}-2\alpha[\gamma_{n+1\cdot 1}+\gamma_{n+1\cdot 0}] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{n\cdot\sigma} &= (1+\alpha^2)\gamma_{n\cdot\sigma}+\alpha^2\gamma_{n\cdot\sigma-1}-2\alpha[\gamma_{n+1\cdot\sigma}+\gamma_{n+1\cdot\sigma-1}]. \end{aligned}$$

Es bleibt noch der Faktor $\frac{\alpha}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2}$ zu entwickeln, zu welchem Zwecke wir eine Bezeichnung von Gyldén einführen, nämlich

$$126)\qquad \beta^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Dann wird

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2} = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{1-2\beta^2\lambda+3\beta^4\lambda^2-4\beta^6\lambda^3+-\cdots\},$$

und wenn man endlich setzt:

$$127)\qquad \overline{R}_n = \frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}\{g_{n\cdot 0}-g_{n\cdot 1}\lambda+g_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\},$$

so sind die $g_{n\cdot\sigma}$ durch folgende Relationen gegeben:

$$128)\qquad \begin{aligned} g_{n\cdot 0} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\xi_{n\cdot 0} \\ g_{n\cdot 1} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{\xi_{n\cdot 1}+2\beta^2\xi_{n\cdot 0}\} \\ g_{n\cdot 2} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{\xi_{n\cdot 2}+2\beta^2\xi_{n\cdot 1}+3\beta^4\xi_{n\cdot 0}\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n\cdot\sigma} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{\xi_{n\cdot\sigma}+2\beta^2\xi_{n\cdot\sigma-1}+3\beta^4\xi_{n\cdot\sigma-2}+\cdots\}. \end{aligned}$$

Auch die $g_{n\cdot\sigma}$ hängen, wie oben die $\gamma_{n\cdot\sigma}$, nur von der Grösse α ab.

Es war nun:

$$\frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{arr'}{(\varDelta)^3}-\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

und wir setzen

$$\frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} = 2\,\Sigma'\,\overline{\Omega}_n \cos n\,H_1,$$

wo für $n = 0$ wieder der Faktor 2 zu unterdrücken ist; man hat dann:

$$\overline{\Omega}_n = \frac{m'}{1+m}\,\overline{R}_n$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo zu setzen ist:

$$\overline{\Omega}_0 = \frac{m'}{1+m}\left\{\overline{R}_0 - \frac{a'}{r'}\,\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Schreibt man

129) $$\overline{g}_{0\cdot 0} = g_{0\cdot 0} - \alpha^2,$$

so kommt

130) $$\overline{\Omega}_n = \frac{m'}{1+m}\,\frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}\left\{\overline{g}_{n\cdot 0} - g_{n\cdot 1}\,\lambda + g_{n\cdot 2}\,\lambda^2 - + \cdots\right\},$$

wo zu nehmen ist

$$\overline{g}_{n\cdot 0} = g_{n\cdot 0}$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo die Relation 129) gilt.

In die Gleichung 130) sollen nun statt r' und λ die Funktionen ϱ, ϱ', η und η' eingeführt werden, nach deren Potenzen wir entwickeln. Dies ist leicht auszuführen, indem man sich der Entwicklungen 120) und 120a) erinnert, in deren letzterer man $n+1$ statt n zu setzen hat. Bezeichnet man:

$$\overline{\Omega}_n = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\,\overline{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\,\varrho^s\,\varrho'^{s'}\,\eta^{2\nu}\,\eta'^{2\nu'},$$

oder

131) $$\frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} = 2\Sigma'\,\overline{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\,\varrho^s\,\varrho'^{s'}\,\eta^{2\nu}\,\eta'^{2\nu'}\cos nH_1,$$

so ist, wenn ich wieder den Faktor $\frac{m'}{1+m}$ fortlasse:

132)
$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}_{n\cdot 0\cdot 0} &= \overline{g}_{n\cdot 0}\\
\overline{\Omega}_{n\cdot 1\cdot 0} &= -(n+1)\overline{g}_{n\cdot 0} - 2g_{n\cdot 1}\\
\overline{\Omega}_{n\cdot 0\cdot 1} &= (n+2)\overline{g}_{n\cdot 0} + 2g_{n\cdot 1}.
\end{aligned}$$

Diese Formeln ergeben sich übrigens auch sofort aus 122), wenn man dort g statt γ, und in den Faktoren durchgehends $n+1$ statt n setzt. Für unsere Zwecke brauchen wir nur die eben angeführten Coefficienten.

Es ist also nach dem Vorhergehenden mit Fortlassung von Gliedern vierten Grades

$$133)\quad a\Omega = 2\Sigma\Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1 + 2\Sigma\overline{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}h\cos nH_1,$$

wo h durch die Relation 106) gegeben ist.

4. Jetzt werde ich die Entwicklungen der Funktionen Q, P und Z geben. Nach 34a) haben wir

$$Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{dv} = \frac{\partial}{dv}\left[\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}a\Omega\right].$$

Aus der Gleichung 133) folgt aber

$$\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}a\Omega = (1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-+\cdots)2\Sigma\Omega_{(n.s.s)_{\nu.\nu}}\varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1$$
$$+(1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-+\cdots)2\Sigma\overline{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}h\cos nH_1.$$

Wenn man also setzt

$$134)\quad \frac{1-\eta^2}{(1+\varrho^2)}a\Omega = 2\Sigma Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1 + 2\Sigma\overline{Q}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}h\cos nH_1,$$

so folgt aus der Vergleichung der beiden letzten Gleichungen:

$$135)\quad \begin{aligned} Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= \Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} - 2\Omega_{(n.s-1.s')_{\nu.\nu'}} + 3\Omega_{(n.s-2.s')_{\nu.\nu'}} -+\cdots\cdots \\ &\quad -\Omega_{(n.s.s')_{\nu-1.\nu'}} + 2\Omega_{(n.s-1.s')_{\nu-1.\nu'}} - 3\Omega_{(n.s-2.s')_{\nu-1.\nu'}} +-\cdots\cdots \\ \overline{Q}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= \overline{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} - 2\overline{\Omega}_{(n.s-1.s')_{\nu.\nu'}} +-\cdots\cdots \\ &\quad -\overline{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu-1.\nu'}} + 2\overline{\Omega}_{(n.s-1.s')_{\nu-1.\nu'}} -+\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo diejenigen Ω-Coefficienten fortzulassen sind, welche negative Indices erhalten würden; dadurch werden diese nach den Ω-Coefficienten fortschreitenden Reihen endlich, und man hat speciell:

135a)

$$Q_{n.0.0} = \Omega_{n.0.0}$$

$$Q_{n.1.0} = \Omega_{n.1.0} - 2\Omega_{n.0.0}$$
$$Q_{n.0.1} = \Omega_{n.0.1}$$

$$Q_{n.2.0} = \Omega_{n.2.0} - 2\Omega_{n.1.0} + 3\Omega_{n.0.0}$$
$$Q_{n.1.1} = \Omega_{n.1.1} - 2\Omega_{n.0.1}$$
$$Q_{n.0.2} = \Omega_{n.0.2}$$

$$Q_{(n.0.0)_{1.0}} = \Omega_{(n.0.0)_{1.0}} - \Omega_{n.0.0}$$
$$Q_{(n.0.0)_{0.1}} = \Omega_{(n.0.0)_{0.1}}$$

$$Q_{n.3.0} = \Omega_{n.3.0} - 2\Omega_{n.2.0} + 3\Omega_{n.1.0} - 4\Omega_{n.0.0}$$
$$Q_{n.2.1} = \Omega_{n.2.1} - 2\Omega_{n.1.1} + 3\Omega_{n.0.1}$$
$$Q_{n.1.2} = \Omega_{n.1.2} - 2\Omega_{n.0.2}$$
$$Q_{n.0.3} = \Omega_{n.0.3}$$

$$Q_{(n.1.0)_{1.0}} = \Omega_{(n.1.0)_{1.0}} - 2\Omega_{(n.0.0)_{1.0}} - \Omega_{n.1.0} + 2\Omega_{n.0.0}$$
$$Q_{(n.1.0)_{0.1}} = \Omega_{(n.1.0)_{0.1}} - 2\Omega_{(n.0.0)_{0.1}}$$
$$Q_{(n.0.1)_{1.0}} = \Omega_{(n.0.1)_{1.0}} - \Omega_{n.0.1}$$
$$Q_{(n.0.1)_{0.1}} = \Omega_{(n.0.1)_{0.1}}$$

$$\overline{Q}_{n.0.0} = \overline{\Omega}_{n.0.0}.$$

Um die Entwicklung von Q zu erhalten, brauchen wir jetzt nur 134) partiell nach v zu differenziren; da

$$\frac{\partial \cos m H_1}{dv} = -m \sin m H_1,$$

so wird, bei Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades:

136)
$$\begin{aligned} Q = & -2\Sigma n\, Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin n H_1 \\ & -2\Sigma n\, \overline{Q}_{n.0.0}\, h \sin n H_1 \\ & +2\Sigma' \overline{Q}_{n.0.0} \frac{\partial h}{dv} \cos n H_1. \end{aligned}$$

5. Zur Bildung des Ausdrucks von P erinnern wir uns der Relation 36a)

$$P = r^2 \frac{\partial \Omega}{dr} = -(1-\eta^2) \frac{\partial (a\Omega)}{d\varrho},$$

welche wir mit Rücksicht auf 134) schreiben können:

$$\begin{aligned} P = & -(1-\eta^2)\, 2\Sigma' s\, \Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s-1} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos n H_1 \\ & -(1-\eta^2)\, 2\Sigma' s\, \overline{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s-1} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} h \cos n H_1. \end{aligned}$$

Wenn wir also P unter die folgende Form setzen:

137) $$P = 2\Sigma' P_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos n H_1 + 2\Sigma' \overline{P}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} h \cos H_1,$$

so wird offenbar:

138)
$$\begin{aligned} P_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= -(s+1)\, \Omega_{(n.s+1.s')_{\nu.\nu'}} + (s+1)\, \Omega_{(n.s+1.s')_{\nu-1.\nu'}} \\ \overline{P}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= -(s+1)\, \overline{\Omega}_{(n.s+1.s')_{\nu.\nu'}} + (s+1)\, \overline{\Omega}_{(n.s+1.s')_{\nu-1.\nu'}}, \end{aligned}$$

wo wieder die Ω-Coefficienten mit negativen Indices fortzulassen sind. Man hat speciell:

138)
$$\begin{aligned} P_{n.0.0} &= -\Omega_{n.1.0} & P_{(n.0.0)_{1.0}} &= -\Omega_{(n.1.0)_{1.0}} + \Omega_{n.1.0} \\ P_{n.1.0} &= -2\Omega_{n.2.0} & P_{(n.0.0)_{0.1}} &= -\Omega_{(n.1.0)_{0.1}} \\ P_{n.0.1} &= -\Omega_{n.1.1} & \overline{P}_{n.0.0} &= -\overline{\Omega}_{n.1.0} \\ P_{n.2.0} &= -3\Omega_{n.3.0} & & \\ P_{n.1.1} &= -2\Omega_{n.2.1} & & \\ P_{n.0.2} &= -\Omega_{n.1.2} & & \end{aligned}$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades ist dann

139)
$$P = 2\Sigma' P_{(n.s.s')\nu.\nu'} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1 + 2\Sigma' \overline{P}_{n.0.0}\, h \cos nH_1.$$

6. Zur Bildung der Funktion Z haben wir Gleichung 71)

$$Z = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left(\frac{1}{\varDelta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H).$$

Wenn man setzt:

$$(Z) = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{1}{(\varDelta)^3} - \frac{1}{r'^3}\right](\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H_1),$$

so ist

$$Z = (Z) + \frac{d(Z)}{d\cos H_1} h + \cdots\cdots.$$

Da aber h zweiten Grades und $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ ersten Grades sind, so ist mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades

$$Z = (Z).$$

Wir bezeichnen

140)
$$\overline{Z} = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{1}{(\varDelta)^3} - \frac{1}{r'^3}\right],$$

woraus folgt, mit entsprechender Genauigkeit

141)
$$Z = \overline{Z}(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H_1).$$

Mit Hilfe von Gleichung 123) wird aber:

$$\overline{Z} = \frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2} \frac{a\, d(\Omega)}{d\cos H_1},$$

und bei Berücksichtigung von 131):

$$\overline{Z} = (1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-+\cdots\cdots)2\Sigma' \overline{\Omega}_{(n.s.s')\nu.\nu'} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1.$$

Wenn man also setzt:

142)
$$\overline{Z} = 2\Sigma' X_{(n.s.s')\nu.\nu'} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1,$$

so folgt aus der Vergleichung der beiden letzten Gleichungen:

143)
$$X_{(n.s.s')\nu.\nu'} = \overline{\Omega}_{(n.s.s')\nu.\nu'} - 2\overline{\Omega}_{(n.s-1.s')\nu.\nu'} + 3\overline{\Omega}_{(n.s-2.s')\nu.\nu'} - + \cdots\cdots$$
$$- \overline{\Omega}_{(n.s.s')\nu-1.\nu'} + 2\overline{\Omega}_{(n.s-1.s')\nu-1.\nu'} - 3\overline{\Omega}_{(n.s-2.s')\nu-1.\nu'} + - \cdots\cdots,$$

oder nach 135)

$$X_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} = \overline{Q}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}.$$

Man erhält speciell:

143a)
$$X_{n.0.0} = \overline{\Omega}_{n.0.0}$$
$$X_{n.1.0} = \overline{\Omega}_{n.1.0} - 2\overline{\Omega}_{n.0.0}$$
$$X_{n.0.1} = \overline{\Omega}_{n.0.1}.$$

Setzt man in gleicher Weise wie oben

144)
$$-\overline{Z}\cos H_1 = 2\Sigma' Y_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1,$$

so hat man:

145)
$$Y_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} = -\frac{X_{(n-1.s.s')_{\nu.\nu'}} + X_{(n+1.s.s')_{\nu.\nu'}}}{2}$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo zu nehmen ist:

145a)
$$Y_{(0.s.s')_{\nu.\nu'}} = -X_{(1.s.s')_{\nu.\nu'}}.$$

Aus den Entwicklungen 142) und 144) folgt aber sofort mit Rücksicht auf 141):

146)
$$Z = 2\Sigma' Y_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \mathfrak{z} \cos nH_1$$
$$+ 2\Sigma' X_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \mathfrak{z}' \cos nH_1.$$

Fünftes Kapitel.

Transformation der für die Funktionen Q, P und Z gefundenen Ausdrücke.

1. Die Entwicklungen 136), 139) und 146) sind noch nicht unmittelbar anwendbar bei der Integration der Differentialgleichungen für die Funktionen S, ϱ und $\mathfrak{z}$, da sie die beiden Veränderlichen v und v' neben einander enthalten. Wir denken uns nämlich ϱ', η' und $\mathfrak{z}'$ als bekannte Funktionen von v', und diese Grösse kommt auch im Winkel

$$H_1 = v - v' + (\Omega - \Sigma) - (\Omega' - \Sigma') = v - v' + \mathrm{H} - \mathrm{H}'$$

vor; auch $\Omega' - \Sigma'$ ist eine bekannte Funktion von v'. Wenn man eine scharfe Lösung des Problems beabsichtigt, so wird $\Omega' - \Sigma'$ durch eine der Gleichung 99) oder 100) ganz analoge Relation gegeben sein; ferner wird man nach 111) und in Analogie mit den Gleichungen 37) und 8) bis 12) zunächst haben:

$$147)\qquad \begin{aligned} r' &= \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\varrho'} \\ \varrho' &= (\varrho)' + R' \\ (\varrho)' &= \Sigma \varkappa'_n \cos[(1-\varsigma'_n)v' - \Gamma'_n] \\ \eta' \cos\pi' &= \Sigma \varkappa'_n \cos(\Gamma'_n + \varsigma'_n v') \\ \eta' \sin\pi' &= \Sigma \varkappa'_n \sin(\Gamma'_n + \varsigma'_n v') \\ (\varrho)' &= \eta' \cos \mathrm{v}' \\ \mathrm{v}' &= v' - \Pi' \end{aligned}$$

wo die Grössen $\varkappa'_n$, ς'_n, Γ'_n und die Funktion R' als bekannt vorausgesetzt werden. Man wird nun v', und ebenso ϱ' und H_1 als Funktion von v allein ausdrücken, um in den Differentialgleichungen 34), 36) und 70) nur diese eine Veränderliche zu haben. Gyldén hat im Jahre 1886 in seinen Vorlesungen auf dem Stockholmer Observatorium ein sehr schönes Verfahren gegeben, um diese Transformation von v' auf v auszuführen; dasselbe findet sich übrigens publicirt in seinem Werke „Traité des Orbites absolues etc.“ Da wir die Glieder dritten Grades hier vernachlässigen wollen, so können wir diese Transformationen auf sehr einfache Weise vornehmen.

Wenn wir die Bewegungsconstante n' des störenden Planeten durch die Relation

$$148)\qquad n' = \frac{\sqrt{M'}}{a'^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{wo} \qquad M' = k^2(1+m')$$

definiren, so haben wir ähnlich der Gleichung 57a)

$$149)\qquad n't + A' = v' + \Sigma B'_n \sin n\mathrm{v}' + \mathrm{W}',$$

wo die Funktion W' analog der Funktion W ist und ebenfalls als bekannt angesehen wird; übrigens können wir sie bei unseren Untersuchungen vernachlässigen, wie wir gleich des Näheren erörtern werden. Die Coefficienten B'_n sind ähnlich den B_n; sie sind durch die Relationen 47) gegeben, wenn man dort η' für η schreibt.

Multipliciren wir die Gleichung 57a) mit dem Verhältniss der Bewegungsconstanten

$$150)\qquad \mu = \frac{n'}{n},$$

so haben wir

$$n't + \mu A = \mu v + \mu \Sigma B_n \sin n v + \mu W.$$

Vergleicht man diese Relation mit 149) und bezeichnet man

$$151)\qquad \begin{aligned} B &= A' - \mu A \\ G &= \mu \Sigma B_n \sin n v - \Sigma B'_n \sin n v', \end{aligned}$$

so ist:

$$152)\qquad v' = \mu v + B + G + \mu W - W'.$$

Diese Gleichung dient dazu, v' und seine Funktionen durch v auszudrücken, nachdem man in G und W' ebenfalls v' durch v ersetzt hat.

Hierzu müssen wir zunächst in den Gleichungen 147) die Länge v als unabhänginge Veränderliche einführen; die Relationen:

$$\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Pi' = \Sigma \varkappa'_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\Gamma'_n + \varsigma'_n v')$$

können wir nach 152) folgendermaassen schreiben:

$$\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Pi' = \Sigma \varkappa'_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \{\Gamma'_n + \varsigma'_n B + \mathrm{H} - \mathrm{H}' + \mu \varsigma'_n v + \varsigma'_n G + \mu \varsigma'_n W - \varsigma'_n W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'\}.$$

Die Funktion W kann, wie wir später sehen werden, einen secularen Teil enthalten, und die Funktionen H und H$'$ enthalten ebenfalls einen solchen; ich will bezeichnen:

$$153)\qquad \begin{aligned} \text{p. sec. } W &= \bar{\gamma} v\,^{1)} \\ \mu_2 &= \mu(1+\bar{\gamma}) \\ \text{p. sec. } \mathrm{H} &= c v \\ \text{p. sec. } \mathrm{H}' &= \text{p. sec. } c' v' = \mu_2 c' v, \end{aligned}$$

wo übrigens c und c' zweiten Grades sind. Weiter führe ich die Bezeichnungen ein:

$$153a)\qquad \begin{aligned} \Gamma_n &= \Gamma'_n + \varsigma'_n B \\ \varsigma_n &= \mu_2 \varsigma'_n - c + \mu_2 c' \\ \omega_n &= \Gamma_n + \varsigma_n v. \end{aligned}$$

Dann kann ich die obigen Gleichungen, wie folgt, schreiben:

$$153b)\qquad \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Pi' =$$

$$\Sigma \varkappa'_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\omega_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}') \mp \Sigma \{\varsigma'_n G + \mu \varsigma'_n \overline{W} - \varsigma'_n W' - \overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{H}}'\} \varkappa'_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}') \pm \cdots,$$

---

1) „p. sec." brauche ich als Abkürzung für „pars secularis".

wo der Strich über den Funktionen W, H und H′ bedeutet, dass in ihnen der seculare Teil zu unterdrücken ist. Das zweite Glied rechter Hand ist teils dritten Grades, teils infolge Hinzutretens des Faktors ς'_n ausserordentlich klein. Will man es behufs äusserster Genauigkeit doch berücksichtigen, so hat man für die Funktionen G u. s. w. ihre Werte einzusetzen, nachdem man sie bestimmt hat; es werden sich dann aus den Produkten teils Glieder der Form A, teils solche anderer Formen ergeben; die ersteren belässt man in der Gleichung 153b), während die übrigen in die Funktion R' übergeführt werden müssen; wie dies zu geschehen hat, wird man an der Hand der Relationen 147) unschwer übersehen.

Nach dem Gesagten schreibe ich also:

$$\eta' {\cos \atop \sin} \Pi'_1 = \sum \varkappa'_n {\cos \atop \sin} (\omega_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}')$$

154)
$$\begin{aligned} \varrho' &= (\varrho') + (R') \\ (\varrho') &= \sum \varkappa'_n \cos(v' - \omega_n - \mathrm{H} + \mathrm{H}') = \eta' \cos(v' - \Pi'_1) = \eta' \cos \mathrm{v}'_1 \\ \mathrm{v}'_1 &= v' - \Pi'_1. \end{aligned}$$

Ich habe in diesen Gleichungen (ϱ') zum Unterschiede von $(\varrho)'$ und (R') zum Unterschiede von R' in 147) geschrieben; auch die $\varkappa'_n$ haben hier, streng genommen, eine etwas andere Bedeutung als dort, indem aus der Entwicklung der Gleichung 153b) noch Teile höherer Grade und Ordnungen zu ihnen hinzutreten; diese Unterschiede sind indessen so gering, dass sie für unsere Aufgabe garnicht in Betracht kommen und ich habe die vorstehenden Bemerkungen überhaupt nur gemacht für den Fall, dass man eine sehr weit gehende Lösung unseres Problems beabsichtigte.

Ferner habe ich in die Funktionen $\eta' {\cos \atop \sin} \Pi'_1$ dieselben Argumente ω_n eingeführt, welche nach 10) in $\eta {\cos \atop \sin} \Pi$ vorkommen; dass dieselben wirklich identisch sind, wird sich zeigen; jedoch auch, wenn dies nicht der Fall wäre, liesse sich gegen diese Bezeichnungsweise nichts einwenden, da man nur den n verschiedene Werte zu erteilen brauchte.

Wenn ich nun noch setze:

154a)
$$\Pi_1 = \Pi'_1 - \mathrm{H} + \mathrm{H}',$$

so wird offenbar

154b)
$$\eta' {\cos \atop \sin} \Pi_1 = \sum \varkappa'_n {\cos \atop \sin} \omega_n.$$

2. Nachdem wir jetzt η' und Π_1 als Funktionen von v ausgedrückt haben, kann die weitere Transformation in folgender Weise vor sich gehen; ich setze:

$$
\begin{aligned}
U &= \mu W - W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}' \\
w_1 &= (1-\mu)v - B - U \\
\mathrm{v}_1 &= v - \Pi_1,
\end{aligned} \tag{155}
$$

und erhalte

$$
\begin{aligned}
H_1 &= w_1 - G \\
v' &= -w_1 + v + G + \mathrm{H} - \mathrm{H}' \\
\mathrm{v}_1' &= -w_1 + G + \mathrm{v}_1.
\end{aligned} \tag{155a}
$$

Mit Hilfe dieser Relationen sollen nun die Argumente H_1 und v_1' durch w_1 und v_1 ersetzt werden, indem man nach Potenzen von G entwickelt, welches offenbar vom ersten Grade ist. Diese Entwicklung können wir successive machen. Man hat mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades nach 151) und 47):

$$
\begin{aligned}
G = & -2\mu\eta \sin \mathrm{v} + 2\eta' \sin \mathrm{v}_1' \\
& + \tfrac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2\mathrm{v} - \tfrac{3}{4}\eta'^2 \sin 2\mathrm{v}_1'.
\end{aligned} \tag{156}
$$

Hierin habe ich v_1' für v' geschrieben, da die Differenz beider Grössen für uns verschwindend ist. Wenn man will, kann man die Transformation unschwer ausführen, und die bei den Entwicklungen entstehenden äusserst kleinen Glieder teils in G belassen, teils mit Rücksicht auf die Relation 149) nach W' überführen.

Mit Vernachlässigung der Glieder zweiten Grades ist:

$$
G = -2\mu\eta \sin \mathrm{v} - 2\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1).
$$

Mit Hilfe dieses letzten Ausdrucks findet man aber bis zu den Gliedern zweiten Grades eingeschlossen:

$$
\begin{aligned}
\eta' \sin \mathrm{v}_1' &= -\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1) + G\eta' \cos(w_1 - \mathrm{v}_1) \\
&= -\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1) - \mu\eta\eta' \sin(w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \mu\eta\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - \eta'^2 \sin(2w_1 - 2\mathrm{v}_1) \\
\eta'^2 \sin 2\mathrm{v}_1' &= -\eta'^2 \sin(2w_1 - 2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}
$$

und hieraus mit derselben Genauigkeit nach 156):

$$
\begin{aligned}
G = & -2\mu\eta \sin \mathrm{v} - 2\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1) \\
& + \tfrac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2\mathrm{v} - \mu\eta\eta' \sin(w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + 2\mu\eta\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - \tfrac{5}{4}\eta'^2 \sin(2w_1 - 2\mathrm{v}_1) \\
G^2 = & \; 2\mu^2\eta^2 - 2\mu^2\eta^2 \cos 2\mathrm{v} \\
& - 4\mu\eta\eta' \cos(w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + 4\mu\eta\eta' \cos(w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + 2\eta'^2 - 2\eta'^2 \cos(2w_1 - 2\mathrm{v}_1).
\end{aligned} \tag{156a}
$$

Man bildet nun endlich ohne Schwierigkeit die folgenden Entwicklungen von $\cos n H_1$ und $\sin n H_1$:

$$
\begin{aligned}
{\cos \atop \sin} nH_1 &= {\cos \atop \sin} nw_1 \pm nG {\sin \atop \cos} nw_1 - \frac{n^2 G^2}{2} {\cos \atop \sin} nw_1 \\
&= {\cos \atop \sin} nw_1 + n\mu\eta {\cos \atop \sin}(nw_1 + \mathrm{v}) \qquad - n^2\mu^2\eta^2 {\cos \atop \sin} nw_1 \\
&\quad - n\mu\eta {\cos \atop \sin}(nw_1 - \mathrm{v}) \qquad + \left[\frac{n^2\mu^2}{2} - \tfrac{3}{8}n\mu\right]\eta^2 {\cos \atop \sin}(nw_1 + 2\mathrm{v}) \\
&\quad - n\eta' {\cos \atop \sin}[(n-1)w_1 + \mathrm{v}_1] \qquad + \left[\frac{n^2\mu^2}{2} + \tfrac{3}{8}n\mu\right]\eta^2 {\cos \atop \sin}(nw_1 - 2\mathrm{v}) \\
&\quad + n\eta' {\cos \atop \sin}[(n+1)w_1 - \mathrm{v}_1] \qquad - n(n-1)\mu\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n-1)w_1 + \mathrm{v} + \mathrm{v}_1] \\
&\qquad + n(n+1)\mu\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n+1)w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1] \\
&\qquad + n(n-1)\mu\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n-1)w_1 - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1] \\
&\qquad - n(n+1)\mu\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n+1)w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1] \\
&\qquad - n^2\eta'^2 {\cos \atop \sin} nw_1 \\
&\qquad + \left[\frac{n^2}{2} - \tfrac{5}{8}n\right]\eta'^2 {\cos \atop \sin}[(n-2)w_1 + 2\mathrm{v}_1] \\
&\qquad + \left[\frac{n^2}{2} + \tfrac{5}{8}n\right]\eta'^2 {\cos \atop \sin}[(n+2)w_1 - 2\mathrm{v}_1].
\end{aligned}
\tag{157}
$$

3. Die vorstehenden Ausdrücke dienen zur Darstellung der Produkte

$$\varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} {\cos \atop \sin} n H_1$$

als explicite Funktionen von v.

In allen Fällen, auf die wir gegenwärtig Rücksicht nehmen, können wir die Funktion R' sowie die in den Argumenten auftretende Funktion W' vernachlässigen. Die Gründe hierfür sind leicht zu ersehen; indessen will ich sie hier auseinandersetzen, damit kein Zweifel an der Berechtigung dieses Verfahrens entstehe. Die genannten Funktionen enthalten natürlich einige grosse Glieder, vor allem die sogenannten grossen Ungleichheiten in der Bewegung Jupiters, die durch Saturn veranlasst werden, da seine mittlere Bewegung zu der Jupiters sehr nahe im Verhältniss $\frac{2}{5}$ steht. Dieselben sind mit der Saturnsmasse multiplicirt und erhalten bei uns noch einen der Faktoren $\Omega_{(n.s.s')\nu.\nu'}$, die rein erster Ordnung sind. Die von diesen Funktionen abhängigen Glieder sind also von vornherein sehr klein; die zu ihnen gehörigen Argumente hängen aber ab von der mittleren Bewegung *Saturns*; sie können also durch die Integration nur

vergrössert werden, wenn zwischen der mittleren Bewegung des gestörten Planeten und derjenigen Saturns genäherte Commensurabilität besteht; und in diesem Falle würde man, ehe man auf sie Rücksicht nimmt, die direkten Saturnstörungen berechnen müssen, die natürlich grösser sind. Aber auch diese letzteren liegen im Allgemeinen unterhalb der Grösse, die ich mir in dieser Arbeit als Genauigkeitsgrenze gesteckt habe. Will man eine grössere Genauigkeit erreichen, oder handelt es sich um einen Planeten, der ganz aussergewöhnliche Saturnstörungen erleidet (oder zu erleiden scheint), so hindert nichts, wie schon anfangs bemerkt, die von uns gegebenen Entwicklungen weiter auszudehnen.

Im Gegensatz hierzu können wir die Funktionen R und W nicht als klein betrachten, da sie nicht nur in vielen Fällen thatsächlich sehr gross sind und sogar grösser sein können als die Excentrität der ungestörten Bahn, sondern da sie auch immer wieder zu solchen Gliedern höherer Ordnung Anlass geben, die durch den Integrationsprocess weiter vergrössert werden.

Eingehende Betrachtungen haben mich dazu geführt, allgemein die dritten Potenzen dieser Grössen zu vernachlässigen, und grösstenteils, aber nicht immer, auch die zweiten.

Nach dem Vorhergehenden haben wir die Relationen

$$
158)\quad
\begin{aligned}
(\varrho) &= \eta\cos \mathrm{v} \\
(\varrho') &= \eta'\cos \mathrm{v}_1' = \eta'\cos(w_1-\mathrm{v}_1)+G\eta'\sin(w_1-\mathrm{v}_1) \\
&= \eta'\cos(w_1-\mathrm{v}_1)+\mu\eta\eta'\cos(w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)-\mu\eta\eta'\cos(w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)-\eta'^2+\eta'^2\cos(2w_1-2\mathrm{v}_1) \\
(\varrho)^2 &= \tfrac{1}{2}\eta^2+\tfrac{1}{2}\eta^2\cos 2\mathrm{v} \\
(\varrho)(\varrho') &= \tfrac{1}{2}\eta\eta'\cos(w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+\tfrac{1}{2}\eta\eta'\cos(w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
(\varrho')^2 &= \tfrac{1}{2}\eta'^2+\tfrac{1}{2}\eta'^2\cos(2w_1-2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}
$$

und hieraus folgen mit Rücksicht auf 157) die Entwicklungen:

$$
159)\quad
\begin{aligned}
(\varrho)\tfrac{\cos}{\sin} nH_1 = {} & \tfrac{1}{2}\eta\tfrac{\cos}{\sin}(nw_1+\mathrm{v}) && +\tfrac{1}{2}n\mu\eta^2\tfrac{\cos}{\sin}(nw_1+2\mathrm{v}) \\
& +\tfrac{1}{2}\eta\tfrac{\cos}{\sin}(nw_1-\mathrm{v}) && -\tfrac{1}{2}n\mu\eta^2\tfrac{\cos}{\sin}(nw_1-2\mathrm{v}) \\
& && -\tfrac{1}{2}n\eta\eta'\tfrac{\cos}{\sin}[(n-1)w_1+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& && +\tfrac{1}{2}n\eta\eta'\tfrac{\cos}{\sin}[(n+1)w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1] \\
& && -\tfrac{1}{2}n\eta\eta'\tfrac{\cos}{\sin}[(n-1)w_1-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& && +\tfrac{1}{2}n\eta\eta'\tfrac{\cos}{\sin}[(n+1)w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1]
\end{aligned}
$$

$$
159)\quad
\begin{aligned}
(\varrho')\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nH_1 = \; & \tfrac{1}{2}\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n-1)w_1+\mathrm{v}_1] + \tfrac{1}{2}(n-1)\mu\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n-1)w_1+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{2}\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n+1)w_1-\mathrm{v}_1] + \tfrac{1}{2}(n+1)\mu\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n+1)w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1] \\
& - \tfrac{1}{2}(n-1)\mu\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n-1)w_1-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& - \tfrac{1}{2}(n+1)\mu\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n+1)w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1] \\
& - \eta'^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nw_1 \\
& - \tfrac{1}{2}(n-1)\eta'^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n-2)w_1+2\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{2}(n+1)\eta'^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n+2)w_1-2\mathrm{v}_1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varrho)^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nH_1 = \; & \tfrac{1}{2}\eta^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nw_1 \\
& + \tfrac{1}{4}\eta^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(nw_1+2\mathrm{v}) \\
& + \tfrac{1}{4}\eta^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(nw_1-2\mathrm{v})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varrho)(\varrho') \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nH_1 = \; & \tfrac{1}{4}\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n-1)w_1+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n+1)w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n-1)w_1-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n+1)w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varrho')^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nH_1 = \; & \tfrac{1}{2}\eta'^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nw_1 \\
& + \tfrac{1}{4}\eta'^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n-2)w_1+2\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta'^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(n+2)w_1-2\mathrm{v}_1].
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nun die Ausdrücke $(\varrho)^s(\varrho')^{s'} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nH_1$ bis zu den Gliedern zweiten Grades gebildet haben, bietet die Bildung der vollständigen Produkte

$$\varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \frac{\cos}{\sin} nH_1$$

keine Schwierigkeiten mehr; man vernachlässigt R' und setzt:

$$\varrho^{s} = (\varrho)^{s} + s(\varrho)^{s-1} R + \frac{s(s-1)}{2} (\varrho)^{s-2} R^2 + \cdots;$$

und erhält z. B. bei der Entwicklung der Funktion Q:

$$2\Sigma' n Q_{(n.s.s')\nu.\nu'} \varrho^{s} \varrho_{1}'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin nH_1 = \tag{160}$$

$$= 2\Sigma' n \left\{ Q_{(n.s.s')\nu.\nu'} + (s+1) Q_{(n.s+1.s')\nu.\nu'} R + \frac{(s+1)(s+2)}{2} Q_{(n.s+2.s')\nu.\nu'} R^2 + \cdots \right\} (\varrho)^{s} (\varrho)'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin nH_1.$$

4. Um endlich die definitive Form herzustellen, die ich den Funktionen Q, P und Z geben will, transformiren wir schliesslich noch das Argument:

$$w_2 = (1-\mu)v - B - U.$$

Es ist nach 155)

$$U = \mu W - W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'.$$

Die Funktion U enthält keine Constante, da die constanten Glieder in B aufgenommen sind, aber sie wird im Allgemeinen ein seculares Glied enthalten; dasselbe kommt auf folgende Weise zu Stande:

Die Differentialgleichung 59) für W enthält rechter Hand verschiedene constante Glieder, sowohl erster wie höherer Ordnungen. Der wichtigste Teil erster Ordnung entsteht aus den Gliedern $S - 2R$, und wenn wir mit a_0 den constanten Teil von S, mit b_0 den constanten Teil von R bezeichnen, so ist der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$, soweit er erster Ordnung ist, im Wesentlichsten

$$c_0 = a_0 - 2b_0.$$

Nun ist a_0 die Integrationsconstante, welche bei Integration der Gleichung 34) entsteht (und welche wir auch schon in Gleichung 6) so bezeichnet haben); und zwar ist diese Integrationsconstante eine überzählige, über welche wir verfügen können. Jedenfalls müssen wir sie so wählen, dass sie höchstens eine Grösse rein erster Ordnung wird, denn sonst würde man bei den Entwicklungen nach Potenzen von S auf Unannehmlichkeiten stossen. Wie sich später zeigen wird, ist bei einer derartigen Wahl von a_0 auch b_0 eine Grösse rein erster Ordnung. Es erscheint nun am Einfachsten, wenn man a_0 so bestimmt, dass der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$ verschwindet, und wir werden auch in der Regel so verfahren[1]).

1) Siehe Kap. VI. § 2. Nr. 4.

Indessen giebt es Fälle, in denen es nicht möglich ist, den constanten Teil von $\frac{dW}{dv}$ zum Verschwinden zu bringen; handelt es sich nämlich um einen Planeten, dessen mittlere Bewegung besonders nahe commensurabel ist mit derjenigen Jupiters, und enthält infolgedessen die Funktion R eines oder mehrere auffallend grosse Glieder, so ist der constante Teil von $3R^2$, welche Grösse in der rechten Seite der Gleichung 59) auftritt, grösser als die störende Masse, obwohl er zweiter Ordnung ist; um den constanten Teil von $\frac{dW}{dv}$ zum Verschwinden zu bringen, müsste dann a_0 erheblich gross gewählt werden, und man würde überhaupt bei einem solchen Verfahren zu divergenten Resultaten geführt werden. In den besonders schwierigen Fällen des Systems der kleinen Planeten ist also die Annullirung des constanten Teils rechter Hand der Gleichung 59) nicht ausführbar; und wir wollen deshalb die Summe der constanten Glieder rechter Hand dieser Gleichung, welche rein erster Ordnung oder kleiner sind, mit c_0, den Teil aber, welcher gross ist im Verhältniss zur störenden Masse, und hauptsächlich aus dem Gliede $3R^2$ entsteht, mit γ bezeichnen; dann kann man schreiben:

$$\text{161)} \qquad \frac{dW}{dv} = c_0 + \gamma + \text{periodische Glieder.}$$

Man hat sich nur zu erinnern, dass c_0 stets zum Verschwinden gebracht werden kann, und dass γ nur bei denjenigen Planeten von Null verschieden ist, deren mittlere Bewegung äusserst nahe commensurabel ist mit der Jupiters und die unter die Klasse der kritischen Planeten (Kap. VII. § 1) fallen. Als Maximalwert, den γ überhaupt erreicht, kann man eine Grösse annehmen, welche mit dem Quadrat der elliptischen Excentricität verglichen werden kann, und zwar deshalb, weil der Maximalwert von R eben mit der elliptischen Excentricität vergleichbar ist. Uebrigens sind wohl von den bis jetzt entdeckten Planeten nur Hilda (153) und Ismene (190) als kritisch anzusehen und auch von diesen ist es zweifelhaft.

Wenn wir aber den Ausdruck 161) integriren, so entsteht in W nicht nur das seculare Glied $(c_0+\gamma)v$, sondern auch die Integration der periodischen Glieder erzeugt einen secularen Teil, welcher mindestens zweiten Grades ist. Es ist dies die Folge unseres in den folgenden Kapiteln zu behandelnden Integrationsverfahrens, das ich nach dem Vorgange Gyldén's anwende, und mit Hilfe dessen wir in allen Fällen zu brauchbaren Entwicklungen gelangen.

Man erhält W in der Form:

$$\text{161a)} \qquad W = (c_0+\gamma+\gamma_0)v + \text{periodische Glieder},$$

und nach pag. 61 haben wir:

$$\bar{\gamma} = c_0+\gamma+\gamma_0.$$

Es wird sich zeigen, dass γ stets positiv ist, während γ_0 auch negativ sein kann, aber mindestens zweiten Grades ist.

Von der Funktion W', welche wir vernachlässigen, kann man annehmen, dass sie keinen secularen Teil enthält, da die Störungen, denen Jupiter ausgesetzt ist, so klein sind, dass man diesen Teil zum Verschwinden bringen kann.

Die Funktionen H und H′ enthalten beide einen secularen Teil, der zweiten Grades und ausserordentlich klein ist, und den man aus den Gleichungen 100) und 93) entnimmt. Nach 153) hatten wir bezeichnet:

$$\text{p. sec. H} = cv$$
$$\text{p. sec. H}' = \mu_2 c' v$$
$$\mu_2 = \mu(1+\overline{\gamma}).$$

Es ist also:

$$\text{p. sec. } w_1 = (1-\mu)v - \mu(c_0+\gamma+\gamma_0)v + (c-\mu_2 c')v = (1-\mu_2)v + (c-\mu_2 c')v,$$

aber

$$\text{p. const. } \frac{dw_1}{dv} = 1-\mu-\mu(c_0+\gamma)+c-\mu_2 c'.$$

Wenn wir nun U, wie folgt, zerlegen:

$$U = \mu(c_0+\gamma)v + \mu K + \mu V, \tag{162}$$

wo die Funktionen K und V gleich definirt werden sollen, und wenn wir bezeichnen:

$$\mu_1 = \mu(1+c_0+\gamma), \tag{163}$$

so wird:

$$w_1 = (1-\mu_1)v - B - \mu K - \mu V.$$

Die Funktion V soll so bestimmt werden, dass sie alle Glieder der Formen A und C enthält, welche in w_1 vorkommen, während alle anderen periodischen Glieder zu K gezogen werden; ferner soll K kein seculares Glied enthalten. Es ist dann:

$$\text{p. sec. } V = \gamma_0 v - (c-\mu_2 c')v,$$

und

$$\text{p. const. } \frac{dV}{dv} = -c+\mu_2 c'.$$

Nun endlich setzen wir:

$$w = (1-\mu_1)v - B - \mu V, \tag{164}$$

woraus folgt:

$$w_1 = w - \mu K,$$

und führen in die obigen Entwicklungen für $\varrho^{s}\varrho'^{s'}\,{}^{\cos}_{\sin}\,nH_1$ statt des Winkels w_1 den Winkel w ein, indem wir nach Potenzen von K entwickeln.

5. Es ist nun nicht schwer, mit Hilfe der Entwicklungen 159), sowie der Formel 160), und indem man, wie eben bemerkt, nach Potenzen von K entwickelt, den Ausdruck 136) für die Funktion Q in die folgende definitive Form überzuführen:

$$
\begin{aligned}
Q = {} & \Sigma A_{n\cdot0\cdot0}\sin nw && +\Sigma A^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0} R\sin nw && -\Sigma n\mu A_{n\cdot0\cdot0} K\cos nw \\
& +\Sigma A^{2\cdot0}_{n\cdot0\cdot0} R^2\sin nw && -\Sigma n\mu A^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0} RK\cos nw && -\tfrac{1}{2}\Sigma n^2\mu^2 A_{n\cdot0\cdot0} K^2\sin nw \\
& +\Sigma A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\eta\sin(nw+\mathrm{v}) && +\Sigma A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R\eta\sin(nw+\mathrm{v}) && -\Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} K\eta\cos(nw+\mathrm{v}) \\
& +\Sigma A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\eta\sin(nw-\mathrm{v}) && +\Sigma A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R\eta\sin(nw-\mathrm{v}) && -\Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} K\eta\cos(nw-\mathrm{v}) \\
& +\Sigma A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} K\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} K\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma A_{n\cdot2\cdot0}\eta^2\sin nw && +\Sigma A^{1\cdot0}_{n\cdot2\cdot0} R\eta^2\sin nw && -\Sigma n\mu A_{n\cdot2\cdot0} K\eta^2\cos nw \\
& +\Sigma A^{(+2)}_{n\cdot2\cdot0}\eta^2\sin(nw+2\mathrm{v}) && +\Sigma A^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot2\cdot0} R\eta^2\sin(nw+2\mathrm{v}) && -\Sigma n\mu A^{(+2)}_{n\cdot2\cdot0} K\eta^2\cos(nw+2\mathrm{v}) \\
& +\Sigma A^{(-2)}_{n\cdot2\cdot0}\eta^2\sin(nw-2\mathrm{v}) && +\Sigma A^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot2\cdot0} R\eta^2\sin(nw-2\mathrm{v}) && -\Sigma n\mu A^{(-2)}_{n\cdot2\cdot0} K\eta^2\cos(nw-2\mathrm{v}) \\
& +\Sigma A^{(+2)}_{n\cdot1\cdot1}\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} R\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(+2)}_{n\cdot1\cdot1} K\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot1}\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} R\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot1} K\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot1}\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} R\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot1} K\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma A^{(-2)}_{n\cdot1\cdot1}\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} R\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(-2)}_{n\cdot1\cdot1} K\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma A_{n\cdot0\cdot2}\eta'^2\sin nw && +\Sigma A^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot2} R\eta'^2\sin nw && -\Sigma n\mu A_{n\cdot0\cdot2} K\eta'^2\cos nw \\
& +\Sigma A^{(+2)}_{n\cdot0\cdot2}\eta'^2\sin(nw+2\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot2} R\eta'^2\sin(nw+2\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(+2)}_{n\cdot0\cdot2} K\eta'^2\cos(nw+2\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma A^{(-2)}_{n\cdot0\cdot2}\eta'^2\sin(nw-2\mathrm{v}_1) && +\Sigma A^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot2} R\eta'^2\sin(nw-2\mathrm{v}_1) && -\Sigma n\mu A^{(-2)}_{n\cdot0\cdot2} K\eta'^2\cos(nw-2\mathrm{v}_1) \\
& + Q_\iota.
\end{aligned}
\tag{165}
$$

Ich habe hier mit Q_ι denjenigen Teil von Q bezeichnet, der von den Neigungen abhängt und den ich in No. 7 dieses Kapitels entwickeln will. Vernachlässigt habe ich R', W', die dritten Potenzen von R und K, und endlich die zweiten Potenzen dieser Funktionen, wenn sie noch mit η oder η' multiplicirt sind, sowie die Glieder dritten Grades.

Die Wahl der Indices für die A-Coefficienten hoffe ich in möglichst über-

sichtlicher Weise getroffen zu haben: von den unteren Indices giebt der erste den Faktor von w, der zweite die Potenz von η, der dritte die Potenz von η'; von den oberen Indices giebt der mit einem Vorzeichen versehene die ganze Zahl, mit der v oder v_1, oder auch beide multiplicirt sind; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erste die Potenz von R, der zweite die von R'; der letztere ist natürlich hier stets Null.

Für die A-Coefficienten findet man schliesslich die folgenden Ausdrücke [1]), wo ich der grösseren Klarheit wegen für die Coefficienten, deren Index n gleich Null ist, die Werte ausdrücklich hingeschrieben habe, da sie einerseits halb zu nehmen sind, andererseits sich teilweise zusammenziehen lassen. In einem Falle habe ich dies auch für $n = 1$ gethan; es dürfte somit in den angeführten Formeln keine Unklarheit sein.

$$166)\quad A_{n.0.0} = -2n\,Q_{n.0.0}, \qquad A_{0.0.0} = 0$$

$$A^{(+1)}_{n.1.0} = -n\left\{Q_{n.1.0} + 2n\mu\,Q_{n.0.0}\right\}, \qquad A^{(+1)}_{0.1.0} = 0$$

$$A^{(-1)}_{n.1.0} = -n\left\{Q_{n.1.0} - 2n\mu\,Q_{n.0.0}\right\}, \qquad A^{(-1)}_{0.1.0} = 0$$

$$A^{(+1)}_{n.0.1} = -(n+1)\left\{Q_{n+1.0.1} - 2(n+1)\,Q_{n+1.0.0}\right\}, \qquad A^{(+1)}_{0.0.1} = -Q_{1.0.1} + 2Q_{1.0.0}$$

$$A^{(-1)}_{n.0.1} = -(n-1)\left\{Q_{n-1.0.1} + 2(n-1)\,Q_{n-1.0.0}\right\}, \qquad A^{(-1)}_{0.0.1} = 0$$

$$A_{n.2.0} = -n\left\{Q_{n.2.0} - 2n^2\mu^2\,Q_{n.0.0} + 2Q_{(n.0.0)1.0}\right\}, \qquad A_{0.2.0} = 0$$

$$A^{(+2)}_{n.2.0} = -n\left\{\tfrac{1}{2}Q_{n.2.0} + n\mu\,Q_{n.1.0} + \left(n^2\mu^2 - \tfrac{3}{4}n\mu\right)Q_{n.0.0}\right\}, \qquad A^{(+2)}_{0.2.0} = 0$$

$$A^{(-2)}_{n.2.0} = -n\left\{\tfrac{1}{2}Q_{n.2.0} - n\mu\,Q_{n.1.0} + \left(n^2\mu^2 + \tfrac{3}{4}n\mu\right)Q_{n.0.0}\right\}, \qquad A^{(-2)}_{0.2.0} = 0$$

$$A^{(+2)}_{n.1.1} = -(n+1)\left\{\tfrac{1}{2}Q_{n+1.1.1} - (n+1)Q_{n+1.1.0} + n\mu Q_{n+1.0.1} - 2n(n+1)\mu Q_{n+1.0.0}\right\}, \quad A^{(+2)}_{0.1.1} = -\tfrac{1}{2}Q_{1.1.1} + Q_{1.1.0}$$

$$A^{(+1)}_{n.1.1} = -(n-1)\left\{\tfrac{1}{2}Q_{n-1.1.1} + (n-1)Q_{n-1.1.0} + n\mu Q_{n-1.0.1} + 2n(n-1)\mu Q_{n-1.0.0}\right\}, \quad A^{(+1)}_{0.1.1} = \tfrac{1}{2}Q_{1.1.1} - Q_{1.1.0}$$

$$A^{(-1)}_{n.1.1} = -(n+1)\left\{\tfrac{1}{2}Q_{n+1.1.1} - (n+1)Q_{n+1.1.0} - n\mu Q_{n+1.0.1} + 2n(n+1)\mu Q_{n+1.0.0}\right\}, \quad A^{(-1)}_{0.1.1} = 0$$

$$A^{(-2)}_{n.1.1} = -(n-1)\left\{\tfrac{1}{2}Q_{n-1.1.1} + (n-1)Q_{n-1.1.0} - n\mu Q_{n-1.0.1} - 2n(n-1)\mu Q_{n-1.0.0}\right\}, \quad A^{(-2)}_{0.1.1} = 0$$

---

1) In seinen bereits pag. 50 erwähnten „Hülfstafeln" giebt Gyldén die numerischen Werte der A- und B-Coefficienten. Der Umstand, dass diese Coefficienten bei uns in anderer Form auftreten, als bei Gyldén, ist gewiss etwas hinderlich bei Benutzung dieser Tafeln. Indessen scheinen mir die Vorteile der hier angewandten Bezeichnungsweise so bedeutende, dass ich nicht davon abgehen wollte, namentlich da die Gyldén'sche Bezeichnung nicht immer eindeutig ist. — Ausserdem muss ich bemerken, dass unsere A- und B-Coefficienten von der Apsidenbewegung vollkommen unabhängig, ihre Werte also strenge sind. Vgl. die Bemerkung auf pag. X in den Hülfstafeln.



$$A_{n\cdot0\cdot2} = -n\{Q_{n.0.2}-2Q_{n.0.1}-2n^2 Q_{n.0.0}+2Q_{(n.0.0)_{0.1}}\}, \qquad A_{0\cdot0\cdot2}=0$$

$$A^{(+2)}_{n\cdot0\cdot2} = -(n+2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n+2.0.2}-(n+1)Q_{n+2.0.1}+(n^2+\tfrac{11}{4}n+\tfrac{3}{2})Q_{n+2.0.0}\}, \qquad A^{(+2)}_{0\cdot0\cdot2}=-Q_{2\cdot0\cdot2}+2Q_{2\cdot0\cdot1}-3Q_{2\cdot0\cdot0}$$

$$A^{(-2)}_{n\cdot0\cdot2} = -(n-2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n-2.0.2}+(n-1)Q_{n-2.0.1}+(n^2-\tfrac{11}{4}n+\tfrac{3}{2})Q_{n-2.0.0}\}, \qquad A^{(-2)}_{0\cdot0\cdot2}=0$$

$$A^{(-2)}_{1\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Q_{1\cdot0\cdot2}-\tfrac{1}{4}Q_{1\cdot0\cdot0}$$

$$A^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0} = -2nQ_{n.1.0}, \qquad A^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0}=0$$

$$A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} = -n\{2Q_{n.2.0}+2n\mu\, Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0}=0$$

$$A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} = -n\{2Q_{n.2.0}-2n\mu\, Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0}=0$$

$$A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} = -(n+1)\{Q_{n+1.1.1}-2(n+1)Q_{n+1.1.0}\}, \qquad A^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1}=-Q_{1\cdot1\cdot1}+2Q_{1\cdot1\cdot0}$$

$$A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} = -(n-1)\{Q_{n-1.1.1}+2(n-1)Q_{n-1.1.0}\}, \qquad A^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1}=0$$

$$A^{1\cdot0}_{n\cdot2\cdot0} = -n\{3Q_{n.3.0}-2n^2\mu^2 Q_{n.1.0}+2Q_{(n.1.0)_{1\cdot0}}\}, \qquad A^{1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0}=0$$

$$A^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot2\cdot0} = -n\{\tfrac{3}{2}Q_{n.3.0}+2n\mu\, Q_{n.2.0}+(n^2\mu^2-\tfrac{3}{4}n\mu)Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0}=0$$

$$A^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot2\cdot0} = -n\{\tfrac{3}{2}Q_{n.3.0}-2n\mu\, Q_{n.2.0}+(n^2\mu^2+\tfrac{3}{4}n\mu)Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0}=0$$

$$A^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} = -(n+1)\{Q_{n+1.2.1}-2(n+1)Q_{n+1.2.0}+n\mu\, Q_{n+1.1.1}-2n(n+1)\mu Q_{n+1.1.0}\}, \qquad A^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1}=-Q_{1\cdot2\cdot1}+2Q_{1\cdot2\cdot0}$$

$$A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} = -(n-1)\{Q_{n-1.2.1}+2(n-1)Q_{n-1.2.0}+n\mu\, Q_{n-1.1.1}+2n(n-1)\mu Q_{n-1.1.0}\}, \qquad A^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1}=Q_{1\cdot2\cdot1}-2Q_{1\cdot2\cdot0}$$

$$A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} = -(n+1)\{Q_{n+1.2.1}-2(n+1)Q_{n+1.2.0}-n\mu\, Q_{n+1.1.1}+2n(n+1)\mu Q_{n+1.1.0}\}, \qquad A^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1}=0$$

$$A^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot1} = -(n-1)\{Q_{n-1.2.1}+2(n-1)Q_{n-1.2.0}-n\mu\, Q_{n-1.1.1}-2n(n-1)\mu Q_{n-1.1.0}\}, \qquad A^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1}=0$$

$$A^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot2} = -n\{Q_{n.1.2}-2Q_{n.1.1}-2n^2 Q_{n.1.0}+2Q_{(n.1.0)_{0.1}}\}, \qquad A^{1\cdot0}_{0.0.2}=0$$

$$A^{+2\cdot1\cdot0}_{n.0\cdot2} = -(n+2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n+2.1.2}-(n+1)Q_{n+2.1.1}+(n^2+\tfrac{11}{4}n+\tfrac{3}{2})Q_{n+2.1.0}\}, \qquad A^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2}=-Q_{2\cdot1\cdot2}+2Q_{2\cdot1\cdot1}-3Q_{2\cdot1\cdot0}$$

$$A^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot2} = -(n-2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n-2.1.2}+(n-1)Q_{n-2.1.1}+(n^2-\tfrac{11}{4}n+\tfrac{3}{2})Q_{n-2.1.0}\}, \qquad A^{-2.1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2}=0$$

$$A^{-2\cdot1\cdot0}_{1\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Q_{1\cdot1\cdot2}-\tfrac{1}{4}Q_{1.1\cdot0}$$

$$A^{2\cdot0}_{n\cdot0\cdot0} = -2n\, Q_{n.2.0}, \qquad A^{2\cdot0}_{0\cdot0\cdot0}=0.$$

6. Wir wollen nun den Ausdruck Q_ι entwickeln, welcher von den Neigungen abhängt. Nach 136) ist offenbar, wenn wir w_1 für H_1 schreiben, da wir ja die Glieder dritten Grades vernachlässigen wollen:

$$\text{167)} \qquad Q_\iota = -2\Sigma n\,\overline{Q}_{n.0.0}\,h\,\sin nw_1 + 2\Sigma'\,\overline{Q}_{n.0.0}\frac{\partial h}{dv}\cos nw_1,$$

und in diesem Ausdruck sollen h und $\frac{\partial h}{dv}$ zunächst durch $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ ersetzt werden.

Es ist nach 106), wenn wir für H_1 das Argument w_1 setzen, also Glieder dritten Grades fortlassen:

$$168)\qquad h = -\frac{\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2}{2}\cos w_1 + \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\sin w_1 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Durch Differentiation dieses Ausdrucks erhält man $\frac{\partial h}{dv}$, indem man bei dieser Differentiation alle Grössen, welche sich auf die Lage der Bahnebene beziehen, als constant ansieht. Dann ist nämlich:

$$\frac{\partial \cos w_1}{dv} = -\sin w_1, \qquad \frac{\partial \sin w_1}{dv} = \cos w_1$$

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{dv} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv}, \qquad \frac{\partial \frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{dv} = -\mathfrak{z},$$

und man erhält:

$$169)\qquad \frac{\partial h}{dv} = \frac{\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 + \mathfrak{z}'^2}{2}\sin w_1 - \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\cos w_1 + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}.$$

Die Ausdrücke 168) und 169) wollen wir zunächst noch weiter umformen. Man hat nämlich:

$$\mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z},$$

woraus folgt, ähnlich der Relation 89)

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin j \cos \mathfrak{v} + \frac{dv_1}{dv}\sin v - \frac{dv_2}{dv}\cos v + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}.$$

Die ausserordentliche Kleinheit der Funktionen $\frac{dv_1}{dv}$ und $\frac{dv_2}{dv}$ gestattet uns, dieselben hier zu vernachlässigen und wir bilden die folgenden Ausdrücke:

$$170)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{z}^2 &= \tfrac{1}{2}\sin^2 j - \tfrac{1}{2}\sin^2 j \cos 2\mathfrak{v} + 2\mathfrak{Z}\sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z}^2 \\ \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 &= \tfrac{1}{2}\sin^2 j + \tfrac{1}{2}\sin^2 j \cos 2\mathfrak{v} + 2\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \cos \mathfrak{v} + \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2 \\ \mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} &= \tfrac{1}{2}\sin^2 j \sin 2\mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\sin j \cos \mathfrak{v} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}. \end{aligned}$$

Aehnliche Ausdrücke lassen sich für den störenden Körper bilden; man hat nämlich in Analogie mit den Gleichungen 72) bis 77):

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{z}' &= (\mathfrak{z})' + \mathfrak{Z}' \\
(\mathfrak{z})' &= \Sigma \sin \iota'_n \sin[(1+\tau'_n)v' - \Theta'_n] \\
\sin j' \frac{\cos}{\sin} \sigma' &= \Sigma \sin \iota'_n \frac{\cos}{\sin} (\Theta'_n - \tau'_n v') \\
(\mathfrak{z})' &= \sin j' \sin \mathfrak{v}' \\
\mathfrak{v}' &= v' - \sigma',
\end{aligned}
\tag{171}
$$

und hieraus bilden wir:

$$\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} = \sin j' \cos \mathfrak{v}' + \frac{d\nu'_1}{dv'} \sin v' - \frac{d\nu'_2}{dv'} \cos v' + \frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'},$$

wo in Analogie mit 88) gesetzt ist:

171a) $\nu'_1 = \sin j' \cos \sigma', \qquad \nu'_2 = \sin j' \sin \sigma'.$

Die vorstehenden Ausdrücke transformiren wir ebenso wie 147) und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{z}' &= (\mathfrak{z}') + (\mathfrak{Z}') \\
\vartheta_n &= \Theta_n - \tau_n v \\
\Theta_n &= \Theta'_n - \tau'_n B \\
\tau_n &= \mu_2 \tau'_n + c - \mu_2 c' \\
(\mathfrak{z}') &= \Sigma \sin \iota'_n \sin(v' - \vartheta_n - \mathrm{H} + \mathrm{H}') \\
\sin j' \frac{\cos}{\sin} \sigma'_1 &= \Sigma \sin \iota'_n \frac{\cos}{\sin} (\vartheta_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}') \\
(\mathfrak{z}') &= \sin j' \sin \mathfrak{v}'_1 \\
\mathfrak{v}'_1 &= v' - \sigma'_1 \\
\sigma_1 &= \sigma'_1 - \mathrm{H} + \mathrm{H}' \\
\sin j' \frac{\cos}{\sin} \sigma_1 &= \Sigma \sin \iota'_n \frac{\cos}{\sin} \vartheta_n \\
\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} &= \sin j' \cos \mathfrak{v}'_1 + \frac{d\nu'_1}{dv'} \sin v' - \frac{d\nu'_2}{dv'} \cos v' + \left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'}\right),
\end{aligned}
\tag{172}
$$

wo ich $(\mathfrak{Z}')$ und $\left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'}\right)$ geschrieben habe, da in diesen beiden Funktionen die kleinen Glieder aufgenommen sind, die durch Einführung von $\mathfrak{v}'_1$ an Stelle von $\mathfrak{v}'$ entstehen. Die Constanten ι_n, τ'_n und Θ'_n setzen wir als bekannt voraus.

Ferner sei:

$$\mathfrak{v}_1 = v - \sigma_1, \tag{173}$$

woraus nach 152) und 155):

174) $$\mathfrak{v}_1' = -w_1 + \mathfrak{v}_1 + G.$$

Wir vernachlässigen $\frac{dv_1'}{dv'}$, $\frac{dv_2'}{dv'}$ und $\mathfrak{Z}'$ und führen mit Hilfe der Relation 174) für das Argument $\mathfrak{v}_1'$ die Argumente w_1 und $\mathfrak{v}_1$ ein; die Funktion G lassen wir bei Seite, da dies der Vernachlässigung der Glieder dritten Grades gleichkommt. Wir erhalten so:

175a)
$$\mathfrak{z}'^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2 j' - \tfrac{1}{2}\sin^2 j' \cos(2w_1 - 2\mathfrak{v}_1)$$
$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} = -\tfrac{1}{2}\sin^2 j' \sin(2w_1 - 2\mathfrak{v}_1).$$

Auf dieselbe Weise bilden wir endlich:

175b)
$$\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \mathfrak{Z}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1)$$
$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = -\tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_1 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1).$$

Die Ausdrücke 170) und 175) führen wir jetzt in die Relationen 168) und 169) ein, und erhalten dann:

176a)
$$\begin{aligned} h = &-\tfrac{1}{4}\sin^2 j \cos w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j \cos(w_1 - 2\mathfrak{v}) \\ &+\tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\ &-\tfrac{1}{4}\sin^2 j' \cos w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j' \cos(w_1 - 2\mathfrak{v}_1) \\ &-\tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}\sin j \sin(w_1 + \mathfrak{v}) + \tfrac{3}{4}\mathfrak{Z}\sin j \sin(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &-\tfrac{1}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \cos(w_1 + \mathfrak{v}) + \tfrac{1}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \cos(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &-\mathfrak{Z}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1) \\ &-\tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}^2\cos w_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin w_1 \end{aligned}$$

176b)
$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{dv} = &+\tfrac{1}{4}\sin^2 j \sin w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j \sin(w_1 - 2\mathfrak{v}) \\ &-\tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_1 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\ &+\tfrac{1}{4}\sin^2 j' \sin w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j' \sin(w_1 - 2\mathfrak{v}_1) \\ &-\tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}\sin j \cos(w_1 + \mathfrak{v}) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}\sin j \cos(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &+\tfrac{1}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \sin(w_1 + \mathfrak{v}) + \tfrac{3}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \sin(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &-\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1) \\ &+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2 \sin w_1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\cos w_1. \end{aligned}$$

7. Führt man diese Werte in den Ausdruck 167) ein und ersetzt man das Argument w_1 durch w, indem man nach Potenzen von K entwickelt, so kommt der folgende Ausdruck zu Stande:

$$
\begin{aligned}
177)\quad Q_\iota = & \Sigma\bar{A}_{n\cdot2\cdot0}\sin^2 j\sin nw && +\Sigma\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +\Sigma\bar{A}_{n\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\sin nw \\
& +\Sigma\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot2\cdot0}\sin^2 j\sin(nw+2\mathfrak{v}) && +\Sigma\bar{A}^{(+1)}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\Sigma\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\sin(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& +\Sigma\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot2\cdot0}\sin^2 j\sin(nw-2\mathfrak{v}) && +\Sigma\bar{A}^{(-1)}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +\Sigma\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\sin(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& && +\Sigma\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && \\
& -\Sigma n\mu\bar{A}_{n\cdot2\cdot0}K\sin^2 j\cos nw && -\Sigma n\mu\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot1\cdot1}K\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && -\Sigma n\mu\bar{A}_{n\cdot0\cdot2}K\sin^2 j'\cos nw \\
& -\Sigma n\mu\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot2\cdot0}K\sin^2 j\cos(nw+2\mathfrak{v}) && -\Sigma n\mu\bar{A}^{(+1)}_{n\cdot1\cdot1}K\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && -\Sigma n\mu\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot0\cdot2}K\sin^2 j'\cos(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& -\Sigma n\mu\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot2\cdot0}K\sin^2 j\cos(nw-2\mathfrak{v}) && -\Sigma n\mu\bar{A}^{(-1)}_{n\cdot1\cdot1}K\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && -\Sigma n\mu\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot0\cdot2}K\sin^2 j'\cos(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& && -\Sigma n\mu\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot1\cdot1}K\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && \\
& +\Sigma\bar{A}^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0}\mathfrak{Z}\sin j\cos(nw+\mathfrak{v}) && +\Sigma\bar{A}^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot1\cdot0}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}) && \\
& +\Sigma\bar{A}^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0}\mathfrak{Z}\sin j\cos(nw-\mathfrak{v}) && +\Sigma\bar{A}^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot1\cdot0}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}) && \\
& +\Sigma\bar{A}^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1}\mathfrak{Z}\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}_1) && +\Sigma\bar{A}^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot1}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1) && \\
& +\Sigma\bar{A}^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1}\mathfrak{Z}\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}_1) && +\Sigma\bar{A}^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot1}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1) && \\
& +\Sigma\bar{A}^{2\cdot0}_{n\cdot0\cdot0}\mathfrak{Z}^2\sin nw && && \\
& +\Sigma\bar{A}^{1\cdot1}_{n\cdot0\cdot0}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\cos nw && && \\
& +\Sigma\bar{A}^{0\cdot2}_{n\cdot0\cdot0}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2\sin nw && &&
\end{aligned}
$$

Bei den $\bar{A}$-Coefficienten giebt von den unteren Indices der erste den Faktor von w, der zweite die Potenz von $\sin j$, der dritte die Potenz von $\sin j'$; der mit einem Vorzeichen versehene obere Index giebt die ganze Zahl, mit der $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v}_1$ oder auch beide multiplicirt sind; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erstere die Potenz von $\mathfrak{Z}$, der zweite die von $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$.

Man erhält durch die angedeutete Operation die folgenden Ausdrücke für die $\bar{A}$-Coefficienten:

178)

$$\bar{A}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{n}{4}\{\bar{Q}_{n-1.0.0} + \bar{Q}_{n+1.0.0}\} \qquad \bar{A}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = -\frac{n+2}{4}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{(+2)}_{0\cdot 2\cdot 0} = -\tfrac{1}{2}\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = -\frac{n-2}{4}\bar{Q}_{n-1.0.0} \qquad \bar{A}^{(-2)}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{n+2}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1} = \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{(+1)}_{n\cdot 1.1} = -\frac{n}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} \qquad \bar{A}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0$$

$$\bar{A}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = -\frac{n}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0$$

$$\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{n-2}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} \qquad \bar{A}^{(-2)}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0$$

$$\bar{A}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{n}{4}\{\bar{Q}_{n-1.0.0} + \bar{Q}_{n+1.0.0}\} \qquad \bar{A}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0$$

$$\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = -\frac{n+2}{4}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{(+2)}_{0\cdot 0\cdot 2} = -\tfrac{1}{2}\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = -\frac{n-2}{4}\bar{Q}_{n-1.0.0} \qquad \bar{A}^{(-2)}_{0.0\cdot 2} = 0$$

$$\bar{A}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n}{4}\bar{Q}_{n-1.0.0} - \frac{3n+4}{4}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1.0} = -\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{3n-4}{4}\bar{Q}_{n-1.0.0} + \frac{n}{4}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = (n+1)\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{+1\cdot 1.0}_{0\cdot 0\cdot 1} = \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{-1\cdot 0\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = -(n-1)\bar{Q}_{n-1.0.0} \qquad \bar{A}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0$$

$$\bar{A}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{n}{4}\bar{Q}_{n-1.0.0} - \frac{n+4}{4}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{0\cdot 1\cdot 0} = -\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n-4}{4}\bar{Q}_{n-1.0.0} + \frac{n}{4}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 1} = \bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 1} = \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 0.1} = -\bar{Q}_{n-1.0.0} \qquad \bar{A}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0$$

$$178)\qquad \bar{A}^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} = \frac{n-1}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} + \frac{n+1}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{2\cdot 0}_{0.0.0} = 0$$

$$\bar{A}^{1\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} = \frac{n-2}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} - \frac{n+2}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{1\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 0} = -\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{0\cdot 2}_{n\cdot 0\cdot 0} = \tfrac{1}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} - \tfrac{1}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{0\cdot 2}_{0\cdot 0\cdot 0} = 0.$$

8. Ich will nun die Funktion P in derselben Weise transformiren, wie Q; wir berücksichtigen die Entwicklungen 157), 159) und 176a) und führen sie in 139) ein; wenn wir dann gleichzeitig wieder nach Potenzen von $'K$ entwickeln, so wird:

$$
\begin{array}{llll}
179)\; P = & \Sigma B_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw & +\Sigma B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R\cos nw & +\Sigma n\mu B_{n\cdot 0\cdot 0} K\sin nw \\
& +\Sigma B^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R^2\cos nw & +\Sigma n\mu B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} RK\sin nw & -\tfrac{1}{2}\Sigma n^2\mu^2 B_{n\cdot 0\cdot 0} K^2\cos nw \\
\hline
& +\Sigma B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\eta\cos(nw+\mathrm{v}) & +\Sigma B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R\eta\cos(nw+\mathrm{v}) & +\Sigma n\mu B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K\eta\sin(nw+\mathrm{v}) \\
& +\Sigma B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\eta\cos(nw-\mathrm{v}) & +\Sigma B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R\eta\cos(nw-\mathrm{v}) & +\Sigma n\mu B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K\eta\sin(nw-\mathrm{v}) \\
& +\Sigma B^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) & +\Sigma B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) & +\Sigma n\mu B^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma B^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) & +\Sigma B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) & +\Sigma n\mu B^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1) \\
\hline
& +\Sigma B_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\cos nw & +\Sigma B^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) & +\Sigma B_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\cos nw \\
& +\Sigma B^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\cos(nw+2\mathrm{v}) & +\Sigma B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & +\Sigma B^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\cos(nw+2\mathrm{v}_1) \\
& +\Sigma B^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\sin(nw-2\mathrm{v}) & +\Sigma B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) & +\Sigma B^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\cos(nw-2\mathrm{v}_1) \\
& & +\Sigma B^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & \\
\hline
& +\Sigma \bar{B}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos nw & +\Sigma \bar{B}^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) & +\Sigma \bar{B}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\cos nw \\
& +\Sigma \bar{B}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos(nw+2\mathfrak{v}) & +\Sigma \bar{B}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) & +\Sigma \bar{B}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\cos(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& +\Sigma \bar{B}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos(nw-2\mathfrak{v}) & +\Sigma \bar{B}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) & +\Sigma \bar{B}^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\cos(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& & +\Sigma \bar{B}^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) & \\
\hline
& +\Sigma \bar{B}^{+1.1.0}_{n.1.0}\mathfrak{Z}\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}) & +\Sigma \bar{B}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{n.1.0}\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\cos(nw+\mathfrak{v}) & \\
& +\Sigma \bar{B}^{-1.1.0}_{n\cdot 1\cdot 0}\mathfrak{Z}\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}) & +\Sigma \bar{B}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 1.0}\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\cos(nw-\mathfrak{v}) & \\
& +\Sigma \bar{B}^{+1.1.0}_{n.0\cdot 1}\mathfrak{Z}\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1) & & \\
& +\Sigma \bar{B}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1}\mathfrak{Z}\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1) & & \\
\hline
& +\Sigma \bar{B}^{2.0}_{n.0.0}\mathfrak{Z}^2\cos nw & +\Sigma \bar{B}^{1.1}_{n.0\cdot 0}\mathfrak{Z}\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin nw &
\end{array}
$$

Wir haben hierbei die Glieder vernachlässigt, welche R und K enthalten und zugleich zweiten Grades sind, obwohl wir die entsprechenden Glieder in Q berücksichtigt haben. Indessen sind sie hier bedeutungslos, während einige von ihnen in der Funktion Q unter Umständen merklich gross werden können. Uebrigens müssten wir auch unsere frühere Entwicklung von Ω etwas weiter ausführen, um die zu den genannten Gliedern gehörenden B-Coefficienten zu berechnen, während die entsprechenden A-Coefficienten nach 178) ohne Weiteres berechnet werden können.

Die Indicirung der B-Coefficienten ist die gleiche wie die der A-Coefficienten, und die Coefficienten $\overline{B}^{+1.0.1}_{n.0.1}$, $\overline{B}^{-1.0.1}_{n.0.1}$ und $\overline{B}^{0.2}_{n.0.0}$ fallen fort. Schliesslich erhält man für die B-Coefficienten die folgenden Ausdrücke:

180) $B_{n.0.0} = 2P_{n.0.0}$ $\qquad B_{0.0.0} = P_{0.0.0}$

$B^{(+1)}_{n.1.0} = P_{n.1.0} + 2n\mu\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(+1)}_{0.1.0} = P_{0.1.0}$

$B^{(-1)}_{n.1.0} = P_{n.1.0} - 2n\mu\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(-1)}_{0.1.0} = 0$

$B^{(+1)}_{n.0.1} = P_{n+1.0.1} - 2(n+1)\, P_{n+1.0.0},$ $\qquad B^{(+1)}_{0.0.1} = P_{1.0.1} - 2P_{1.0.0}$

$B^{(-1)}_{n.0.1} = P_{n-1.0.1} + 2(n-1)\, P_{n-1.0.0},$ $\qquad B^{(-1)}_{0.0.1} = 0$

$B_{n.2.0} = P_{n.2.0} - 2n^2\mu^2 P_{n.0.0} + 2P_{(n.0.0)_{1.0}},$ $\qquad B_{0.2.0} = \frac{1}{2}P_{0.2.0} + P_{(0.0.0)_{1.0}}$

$B^{(+2)}_{n.2.0} = \frac{1}{2}P_{n.2.0} + n\mu\, P_{n.1.0} + (n^2\mu^2 - \frac{3}{4}n\mu)\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(+2)}_{0.2.0} = \frac{1}{2}P_{0.2.0}$

$B^{(-2)}_{n.2.0} = \frac{1}{2}P_{n.2.0} - n\mu\, P_{n.1.0} + (n^2\mu^2 + \frac{3}{4}n\mu)\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(-2)}_{0.2.0} = 0$

$B^{(+2)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n+1.1.1} - (n+1)\, P_{n+1.1.0} + n\mu\, P_{n+1.0.1} - 2n(n+1)\mu\, P_{n+1.0.0},$ $\qquad B^{(+2)}_{0.1.1} = \frac{1}{2}P_{1.1.1} - P_{1.1.0}$

$B^{(+1)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n-1.1.1} + (n-1)\, P_{n-1.1.0} + n\mu\, P_{n-1.0.1} + 2n(n-1)\mu\, P_{n-1.0.0},$ $\qquad B^{(+1)}_{0.1.1} = \frac{1}{2}P_{1.1.1} - P_{1.1.0}$

$B^{(-1)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n+1.1.1} - (n+1)\, P_{n+1.1.0} - n\mu\, P_{n+1.0.1} + 2n(n+1)\mu\, P_{n+1.0.0},$ $\qquad B^{(-1)}_{0.1.1} = 0$

$B^{(-2)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n-1.1.1} + (n-1)\, P_{n-1.1.0} - n\mu\, P_{n-1.0.1} - 2n(n-1)\mu\, P_{n-1.0.0},$ $\qquad B^{(-2)}_{0.1.1} = 0$

$B_{n.0.2} = P_{n.0.2} - 2P_{n.0.1} - 2n^2 P_{n.0.0} + 2P_{(n.0.0)_{0.1}},$ $\qquad B_{0.0.2} = \frac{1}{2}P_{0.0.2} - P_{0.0.1} + P_{(0.0.0)_{0.1}}$

$B^{(+2)}_{n.0.2} = \frac{1}{2}P_{n+2.0.2} - (n+1)\, P_{n+2.0.1} + (n^2 + \frac{11}{4}n + \frac{3}{2})\, P_{n+2.0.0},$ $\qquad B^{(+2)}_{0.0.2} = \frac{1}{2}P_{2.0.2} - P_{2.0.1} + \frac{3}{2}P_{2.0.0}$

$B^{(-2)}_{n.0.2} = \frac{1}{2}P_{n-2.0.2} + (n-1)\, P_{n-2.0.1} + (n^2 - \frac{11}{4}n + \frac{3}{2})\, P_{n-2.0.0},$ $\qquad B^{(-2)}_{0.0.2} = 0,\ B^{(-2)}_{1.0.2} = \frac{1}{2}P_{1.0.2} - \frac{1}{4}P_{0.0.0}$

$$B^{1.0}_{n.0.0} = 2P_{n.1.0} \qquad B^{1.0}_{0.0.0} = P_{0.1.0}$$

$$B^{+1.1.0}_{n.1.0} = 2P_{n.2.0}+2n\mu\, P_{n.1.0} \qquad B^{+1.1.0}_{0.1.0} = 2P_{0.2.0}$$
$$B^{-1.1.0}_{n.1.0} = 2P_{n.2.0}-2n\mu\, P_{n.1.0} \qquad B^{-1.1.0}_{0.1.0} = 0$$
$$B^{+1.1.0}_{n.0.1} = P_{n+1.1.1}-2(n+1)\,P_{n+1.1.0} \qquad B^{+1.1.0}_{0.0.1} = P_{1.1.1}-2P_{1.1.0}$$
$$B^{-1.1.0}_{n.0.1} = P_{n-1.1.1}+2(n-1)\,P_{n-1.1.0} \qquad B^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0$$

$$B^{2.0}_{n.0.0} = 2P_{n.2.0} \qquad B^{2.0}_{0.0.0} = P_{0.2.0}$$

$$\bar{B}_{n.2.0} = -\tfrac{1}{4}\{\bar{P}_{n-1.0.0}+\bar{P}_{n+1.0.0}\} \qquad \bar{B}_{0.2.0} = -\tfrac{1}{4}\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{(+2)}_{n.2.0} = \tfrac{1}{4}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{(+2)}_{0.2.0} = \tfrac{1}{4}\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{(-2)}_{n.2.0} = \tfrac{1}{4}\bar{P}_{n-1.0.0} \qquad \bar{B}^{(-2)}_{0.2.0} = 0$$

$$\bar{B}^{(+2)}_{n.1.1} = -\tfrac{1}{2}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{(+2)}_{0.1.1} = -\tfrac{1}{2}\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{(+1)}_{n.1.1} = \tfrac{1}{2}\bar{P}_{n-1.0.0} \qquad \bar{B}^{(+1)}_{0.1.1} = \tfrac{1}{2}\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{(-1)}_{n.1.1} = \tfrac{1}{2}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{(-1)}_{0.1.1} = 0$$
$$\bar{B}^{(-2)}_{0.1.1} = -\tfrac{1}{2}\bar{P}_{n-1.0.0} \qquad \bar{B}^{(-2)}_{0.1.1} = 0$$

$$\bar{B}_{n.0.2} = -\tfrac{1}{4}\{\bar{P}_{n-1.0.0}+\bar{P}_{n+1.0.0}\} \qquad \bar{B}_{0.0.2} = -\tfrac{1}{4}\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{(+2)}_{n.0.2} = \tfrac{1}{4}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{(+2)}_{0.0.2} = \tfrac{1}{4}\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{(-2)}_{n.0.2} = \tfrac{1}{4}\bar{P}_{n-1.0.0} \qquad \bar{B}^{(-2)}_{0.0.2} = 0$$

$$\bar{B}^{+1.1.0}_{1.0} = -\tfrac{1}{4}\bar{P}_{n-1.0.0}-\tfrac{3}{4}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{+1.1.0}_{0.1.0} = -\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{-1.1.0}_{n.1.0} = \tfrac{3}{4}\bar{P}_{n-1.0.0}+\tfrac{1}{4}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{-1.1.0}_{0.1.0} = 0$$
$$\bar{B}^{+1.1.0}_{n.0.1} = \bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{+1.1.0}_{0.0.1} = \bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{-1.1.0}_{n.0.1} = -\bar{P}_{n-1.0.0} \qquad \bar{B}^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0$$

$$\bar{B}^{+1.0.1}_{n.1.0} = -\tfrac{1}{4}\bar{P}_{n-1.0.0}+\tfrac{1}{4}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{+1.0.1}_{0.1.0} = 0$$
$$\bar{B}^{-1.0.1}_{n.1.0} = \tfrac{1}{4}\bar{P}_{n-1.0.0}-\tfrac{1}{4}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{-1.0.1}_{0.1.0} = 0$$

$$\bar{B}^{2.0}_{n.0.0} = -\tfrac{1}{2}\{\bar{P}_{n-1.0.0}+\bar{P}_{n+1.0.0}\} \qquad \bar{B}^{2.0}_{0.0.0} = -\tfrac{1}{2}\bar{P}_{1.0.0}$$
$$\bar{B}^{1.1}_{n.0.0} = \tfrac{1}{2}\bar{P}_{n-1.0.0}-\tfrac{1}{2}\bar{P}_{n+1.0.0} \qquad \bar{B}^{1.1}_{0.0.0} = 0.$$

9. Endlich soll nun der Ausdruck für die Funktion Z vollständig entwickelt werden. Man hat nach 146) mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades:

$$Z = 2\Sigma' Y_{n.s.s'}\,\varrho^{s}\varrho'^{s'}\mathfrak{z}\cos nH_1 + 2\Sigma' X_{n.s.s'}\,\varrho^{s}\varrho'^{s'}\mathfrak{z}'\cos nH_1.$$

Für die Funktion $\mathfrak{z}'$ ist mit Rücksicht auf die Gleichungen 172) und 174):

$$(\mathfrak{z}') = -\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1 - G),$$

und wenn wir nach Potenzen von G entwickeln und uns der Relation 156a) erinnern:

$$181)\quad (\mathfrak{z}') = -\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1) - \mu\eta \sin j' \sin(w_1 + \mathrm{v} - \mathfrak{v}_1) + \mu\eta \sin j' \sin(w_1 - \mathrm{v} - \mathfrak{v}_1)$$
$$+ \eta' \sin j' \sin(\mathrm{v}_1 - \mathfrak{v}_1) - \eta' \sin j' \sin(2w_1 - \mathrm{v}_1 - \mathfrak{v}_1).$$

Mit Benutzung dieser Relation und der folgenden:

$$\mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z},$$

sowie der Entwicklungen 157) und 159) erhält man den folgenden Ausdruck für Z, wenn man wieder die Funktion $\mathfrak{Z}'$ bei Seite lässt:

$$182)\quad Z = \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} \sin j \sin(nw + \mathfrak{v}) + \Sigma C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R \sin j \sin(nw + \mathfrak{v}) - \Sigma n\mu\, C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} K \sin j \cos(nw + \mathfrak{v})$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} \sin j \sin(nw - \mathfrak{v}) + \Sigma C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R \sin j \sin(nw - \mathfrak{v}) - \Sigma n\mu\, C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} K \sin j \cos(nw - \mathfrak{v})$$
$$+ \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1) + \Sigma C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1) - \Sigma n\mu\, C^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} K \sin j' \cos(nw + \mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1) + \Sigma C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1) - \Sigma n\mu\, C^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} K \sin j' \cos(nw - \mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0} \mathfrak{Z} \cos nw$$
$$+ \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} \eta \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} \eta' \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} \eta \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} \eta' \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} - \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} \eta \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} \eta' \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} \eta \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} \eta' \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} - \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} \eta \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} \eta' \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} \eta \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} \eta' \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} \eta \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} \eta' \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} \eta \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} \eta' \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}_1).$$

Bei den C-Coefficienten bezieht sich derjenige von den beiden oberen Indices, welcher mit einem Vorzeichen versehen ist, auf die Faktoren der Grössen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_1$, v oder v_1; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erstere die Potenz von R, der zweite die von $\mathfrak{Z}$. Von den unteren Indices giebt der erste den Faktor von w, der zweite die Potenz von $\sin j$, der dritte die von $\sin j'$, der vierte die von η und der fünfte die von η'; die beiden letzteren sind fortgelassen, wenn sie beide zugleich Null sind.

Für diese C-Coefficienten ergeben sich die folgenden Werte:

182a)
$$C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = Y_{n.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = -Y_{n.0.0}$$
$$C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = X_{n+1.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = X_{n-1.0.0}$$

$$C^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0} = Y_{0.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$$
$$C^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1} = X_{1.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0$$

$$C^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} Y_{n.1.0} + n\mu\, Y_{n.0.0}$$
$$C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} Y_{n.1.0} - n\mu\, Y_{n.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\tfrac{1}{2} Y_{n.1.0} + n\mu\, Y_{n.0.0}\right\}$$
$$C^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\tfrac{1}{2} Y_{n.1.0} - n\mu\, Y_{n.0.0}\right\}$$

$$C^{(+2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} Y_{0.1.0}$$
$$C^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} Y_{0.1.0}$$
$$C^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = 0$$
$$C^{(-2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = 0$$

$$C^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} Y_{n+1.0.1} - (n+1)\, Y_{n+1.0.0}$$
$$C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} Y_{n-1.0.1} + (n-1)\, Y_{n-1.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\tfrac{1}{2} Y_{n+1.0.1} - (n+1)\, Y_{n+1.0.0}\right\}$$
$$C^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\tfrac{1}{2} Y_{n-1.0.1} + (n-1)\, Y_{n-1.0.0}\right\}$$

$$C^{(+2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} Y_{1.0.1} - Y_{1.0.0}$$
$$C^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} Y_{1.0.1} - Y_{1.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = 0$$
$$C^{(-2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = 0$$

$$C^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} X_{n+1.1.0} + n\mu\, X_{n+1.0.0}$$
$$C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} X_{n+1.1.0} - n\mu\, X_{n+1.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\tfrac{1}{2} X_{n-1.1.0} + n\mu\, X_{n-1.0.0}\right\}$$
$$C^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\tfrac{1}{2} X_{n-1.1.0} - n\mu\, X_{n-1.0.0}\right\}$$

$$C^{(+2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} X_{1.1.0}$$
$$C^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2} X_{1.1.0}$$
$$C^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = 0$$
$$C^{(-2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = 0$$

$$C^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} X_{n+2.0.1} - (n+1)\, X_{n+2.0.0}$$
$$C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} X_{n.0.1} + (n-1)\, X_{n.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\tfrac{1}{2} X_{n.0.1} - (n+1)\, X_{n.0.0}\right\}$$
$$C^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\tfrac{1}{2} X_{n-2.0.1} + (n-1)\, X_{n-2.0.0}\right\}$$

$$C^{(+2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} X_{2.0.1} - X_{2.0.0}$$
$$C^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2} X_{0.0.1} - X_{0.0.0}$$
$$C^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = 0$$
$$C^{(-2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = 0, \quad C^{(-2)}_{1\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = -\tfrac{1}{2} X_{1.0.1}$$

$$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = Y_{n.1.0}$$
$$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = -Y_{n.1.0}$$
$$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = X_{n+1.1.0}$$
$$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = -X_{n-1.1.0}$$

$$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} = Y_{0.1.0}$$
$$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$$
$$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} = X_{1.1.0}$$
$$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0$$

$$C^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} = 2\, Y_{n.0.0}$$

$$C^{0\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 0} = Y_{0.0.0}.$$

10. Die Anzahl der Glieder, welche in den vorstehenden Entwicklungen der Funktionen Q, P und Z vorkommen, ist sehr gross; ich habe aber auch diese Ausdrücke mit aller wünschenswerten Vollständigkeit gegeben. Man wird in jedem einzelnen Falle nur eine verhältnismässig sehr geringe Zahl von diesen

Gliedern zu berücksichtigen haben; da aber in verschiedenen Fällen auch verschiedene Glieder die wichtigsten sind, so habe ich die Ausdrücke hier vollständig geben müssen; denn ein Glied, das bei der Berechnung eines gewissen Planeten sehr klein ist, kann bei Berechnung eines anderen Planeten sehr wesentlich sein. Welche Glieder unter den angeführten die wichtigsten sind, hängt in erster Linie von dem Werte der mittleren Bewegung des Planeten ab und in zweiter Linie von dem Betrage seiner Excentricität und Neigung.

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Hilfscoordinaten. — Die gewöhnlichen Planeten.

§ 1.

1. Um die Ausdrücke für die Gyldén'schen Coordinaten S, ϱ, W und $\mathfrak{z}$ zu finden, welche zur Berechnung des Ortes des gestörten Planeten mittels der Gleichungen 62), 68) und 92) dienen, müssen wir die Gleichungen 34), 36), 59) und 70) integriren, welche ich zur grösseren Uebersichtlichkeit hier zusammenstelle[1]):

$$\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = -(1+S)^2 Q - \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} \tag{183}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = &-\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}+(1+S)^2 Q\right\}\frac{d\varrho}{dv}\\ &-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2}+\frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2+\frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}Q\right\}(1+\varrho)+2S+S^2-(1+S)^2 P\end{aligned} \tag{184}$$

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dv} = &\, S-2R-2RS+3R^2\pm\cdots\cdots\\ &+\{6R-2S-12R^2+6RS\pm\cdots\cdots\}\eta\cos\mathrm{v}\\ &-3\eta^2R+\{\tfrac{3}{2}S-6R\pm\cdots\cdots\}\eta^2\cos 2\mathrm{v}\\ &\pm\cdots\cdots\\ &-\frac{d\Xi}{dv}\end{aligned} \tag{185}$$

---

1) In seinen pag. 50 erwähnten Hülfstafeln bemerkt Gyldén pag. XVI, dass in der von mir angewandten Differentialgleichung für ϱ das Glied fehle, welches die dort mit $\overline{g}$ bezeichnete Con-



$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv}+(1+S)^2 Z. \tag{186}$$

Kommt das Verhältniss der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Planeten keinem niedrigzahligen Bruche sehr nahe, handelt es sich also, wie wir uns ausdrücken wollen, um einen „gewöhnlichen" und nicht um einen „charakteristischen" Planeten, so ist die Herstellung der Ausdrücke für die genannten Coordinaten eine verhältnissmässig einfache Operation, und ich werde die hierzu nötigen Formeln in aller Ausführlichkeit herleiten, so dass der Rechner sich ohne Weiteres derselben bedienen kann. Ich beschränke mich aber nicht auf diesen einfachen Fall, sondern ich will das vorgesteckte Problem für jeden beliebigen Wert der mittleren Bewegungen betrachten; jedoch würde es zu weit führen und der Uebersichtlichkeit sehr schaden, wenn ich im Rahmen dieser Abhandlung jeden einzelnen Fall genäherter oder strenger Commensurabilität erschöpfend darstellen wollte, und deswegen werde ich mich darauf beschränken, für die schwierigen Fälle des Systems der kleinen Planeten die Entwicklungen soweit auszuführen, dass der weitere Gang der Rechnung keine ernstlichen Schwierigkeiten mehr bietet.

Offenbar wird die Form, unter der sich die Integrale der vorstehenden Gleichungen darstellen, im Wesentlichen abhängen von der Form, die wir den Funktionen Q, P und Z geben. Diese letzteren aber haben wir in den vorigen Kapiteln in trigonometrische Reihen entwickelt und die Gyldén'schen Coordinaten werden wir in der gleichen Form darstellen.

Wir haben als Grundlage unserer Untersuchungen angenommen, dass die im ersten Kapitel (pag. 12) genannten Bedingungen erfüllt sind, wenigstens für einen beschränkten Zeitraum; dieser Zeitraum wird auch im Falle, dass man die Stabilität des Systems nicht voraussetzen wolle und dass es sich um kleine Planeten handelt, sicherlich eine Reihe von Jahrtausenden umfassen. Wir haben hierfür bis jetzt keinen stichhaltigen Beweis, und wir werden zur Annahme dieser Thatsache einstweilen nur durch die Resultate der Beobachtungen und durch diejenigen der Berechnungen nach der Methode der speciellen Störungen geführt; denn diese liefern uns für die osculirenden elliptischen Elemente solche Werte, welche den genannten Bedingungen entsprechen. Ob die letzteren auch während eines unbegrenzten Zeitraums erfüllt bleiben oder nicht, ist eine Frage, welche mit derjenigen nach der Stabilität des Systems zusammenfällt und welche ich hier nicht berühren will. Wir stellen uns demnach auch nicht die Aufgabe, eine absolute Lösung im Gyldén'schen Sinne zu erhalten, welche die absolute Convergenz aller angewandten Reihenentwicklungen und Annäherungsverfahren erheischen würde; auch die Curve, welche der Planet beschreibt, braucht nicht

---

stante enthält. Da Gyldén die folgenden Untersuchungen leider nicht zu Gesicht bekommen hat, so konnte er sich nicht davon überzeugen, dass dies unzutreffend ist, indem ich dies Glied nur in einer anderen Weise berücksichtigt habe.



eine periplegmatische Curve [1]) nach Gyldén's Definition zu sein. Indem wir unsere Aufgabe in dieser Weise beschränken, können wir die Formeln, nach denen die numerischen Rechnungen auszuführen sind, ausserordentlich einfach gestalten, ohne dass die Genauigkeit, mit der sich die Coordinaten des gestörten Körpers darstellen, eine Einbusse erlitte.

2. Unsere Lösung darf also, wie ich schon im ersten Kapitel bemerkt habe, seculare Glieder enthalten. Tisserand [2]) hat in dieser Beziehung einige Bemerkungen gemacht über die elementaren Glieder, welche ich bei der Berechnung der Bahn des Planeten Hestia gefunden habe; er zeigt, dass die Ausdrücke sich vereinfachen, wenn man diese Glieder in secularer Form darstellt: man wird selbst in Fällen, wo diese Störungen sehr gross sind, die von den dritten Potenzen der Zeit abhängigen Glieder (also die Störungen dritter Ordnung) vernachlässigen können.

Nun wird man aber, wie ich schon pag. 5 bemerkte, im Allgemeinen die Bewegung des störenden Körpers als elliptisch ansehen, wenn es sich um genäherte Darstellung der Coordinaten handelt; und auch, wenn man eine schärfere Darstellung während eines beschränkton Zeitraums anstrebt, wird man wenigstens die secularen Störungen, denen der störende Körper unterworfen ist, vernachlässigen können. Wenn man dies aber thut, so nehmen die genannten Glieder, in periodischer Form dargestellt, eine so einfache Gestalt an, dass dieser letzteren Form gewiss der Vorzug vor der secularen gebührt.

Nur wenn es sich um sehr weitgehende Untersuchungen handelt, und wenn man deshalb die vollen Ausdrücke 147) und 171), resp. 153b) und 172) in die Bewegung des störenden Körpers einführt, was ich in meiner Arbeit über den Planeten Hestia unnötigerweise gethan habe —, nur dann lässt sich an der Zweckmässigkeit der periodischen Form gegenüber der secularen zweifeln. Und doch möchte ich auch dann die periodische Form vorziehen, aus dem Grunde, weil sich dann manche Operation einfacher gestaltet und weil aus der periodischen Form die seculare mit ein paar Federstrichen sich herstellen lässt, während der umgekehrte Process mühsamer ist. Tisserand wendet sich a. a. O. dagegen, dass man einen solchen Ausdruck in periodischer Form integrire; indessen ist es analytisch ganz gleichbedeutend, ob man ihn in der einen oder der anderen Form integrirt; ist die Integration in periodischer Form nicht gerechtfertigt, so ist sie es auch in secularer nicht. Unter allen Umständen ist aber der Unterschied beider Darstellungsweisen ein rein formaler. Ich verweise wegen dieser Frage noch auf die Untersuchungen im achten Kapitel.

1) Siehe die pag. 14 citirte Abhandlung Gyldén's, pag. 3 ff.

2) Tisserand, Traité de Mécanique Céleste. Tome IV. pag. 415. Ich habe anfangs geglaubt, dass bei den Zahlenangaben Tisserand's hier ein Irrtum vorgekommen sei: Tisserand spricht (Zeile 14) von dem Glied in t und (Zeile 15) von dem Glied in t^2; er meint aber offenbar mit dem ersteren das Glied in t^2 und mit dem letzteren das in t^3 in der Entwicklung von $\sin \varDelta$. Der Umstand, dass Tisserand die resp. Potenzen von t um je eine Einheit niedriger angiebt, hat jedenfalls seinen Grund darin, dass er sie sich als Störungen der mittleren Bewegung denkt.



3. Während des Zeitraums von 50 oder 100 Jahren, während dessen unsere Rechnungen giltig bleiben sollen, sind die eingeführten Bahnelemente a oder n, Δ, $\varkappa$, Γ, ι, Θ, wirkliche Constanten. Setzt man auf Grund unserer Formeln die Rechnung über die Grenzen des gewählten Zeitraums hinaus fort, so werden offenbar die fortgelassenen secularen (oder langperiodischen) Glieder beginnen merkbar zu werden, und die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung werden allmählich wachsen. Es scheint demnach, dass unsere Resultate für eine Fortsetzung der Rechnung in ein weiteres Jahrhundert nicht mehr anwendbar seien, und dass man die Berechnung der Störungsglieder von Neuem durchzuführen habe. Dies ist indessen nicht der Fall, man wird vielmehr nur den erwähnten Bahnelementen um ein Weniges veränderte Werte beizulegen und die bereits erhaltenen Resultate weiter zu verwerten haben. Wenn wir also in dieser Weise die Bahnelemente von Jahrhundert zu Jahrhundert variiren, so werden unsere Resultate für eine längere Reihe von Jahrhunderten die Coordinaten des Planeten mit der gewünschten Genauigkeit darstellen; unter Umständen werden allerdings die Werte einzelner Störungsglieder modificirt werden müssen. Auf eine solche seculare Variation der Constanten zurückzukommen, welche einstweilen nur empirisch mit Hilfe der Beobachtungen geschehen kann, werde ich im zweiten Teile Gelegenheit nehmen. Die Giltigkeit unseres Verfahrens würde erst dann aufhören, wenn die pag. 12 genannten Bedingungen nicht mehr erfüllt sind, wenn also eine vollständige Umgestaltung der Bahn des zu berechnenden Planeten stattgefunden hätte.

Wenn man sich gestatten will, eine solche Bewegung „beschränkt stabil" zu nennen, die während eines beschränkten Zeitraums nicht allzusehr von einer gewissen mittleren Kreis- oder elliptischen Bahn abweicht, für die also die Bedingungen pag. 12 erfüllt sind, so sind die Planeten unseres Systems mindestens beschränkt stabil; und diese beschränkte Stabilität findet nur dann nicht statt, wenn die Bahn sich dem parabolischen oder hyperbolischen Charakter nähert oder wenn (bei zu grosser Annäherung des gestörten Körpers an einen der störenden) ein Wechsel des Centralkörpers eintritt; in diesen Fällen werden unsere Formeln deswegen unbrauchbar, weil unsere Entwicklung der Störungsfunktion dann unbedingt divergirt. Dagegen wird sich im Folgenden zeigen, dass eine beliebige Annäherung der mittleren Bewegungen an irgend ein commensurables Verhältniss weder das Aufhören dieser beschränkten Stabilität noch die Unbrauchbarkeit unserer Formeln bedingt.

4. Unter den Voraussetzungen, welche wir gemacht haben, dürften die Reihen, in die wir die Funktionen Ω, Q, P und Z entwickelt haben, brauchbar sein, und man wird auch zu der Vermutung geführt, dass unsere Differentialgleichungen Lösungen in trigonometrischer Form zulassen. Indessen müssen diese beiden Thatsachen noch bewiesen werden; die letztere lässt sich naturgemäss nicht ohne die Voraussetzung der ersteren zeigen, ist sie aber bewiesen, so folgt daraus im Allgemeinen auch die Brauchbarkeit der Entwicklungen der Störungsfunktion.

Dass nun unsere Differentialgleichungen Lösungen rein trigonometrischer Form auch in den Fällen zulassen, in denen die mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers äusserst nahe oder (wenigstens scheinbar) streng commensurabel zu einander sind, erscheint dennoch zunächst zweifelhaft. Ich habe in den Astronomischen Nachrichten[1]) in sehr kurzgefasster Form gezeigt, dass diese Frage in bejahendem Sinne zu beantworten ist, und dass man zu einer solchen Lösung geführt wird, wenn man das von Gyldén gefundene Verfahren der partiellen Integration, das im Folgenden auseinandergesetzt wird, mit gewissen Modifikationen durchführt. Gyldén selbst nahm an, dass diese Methode nicht in allen Fällen zu befriedigenden Resultaten führe und benutzte, ebenso wie die Herren Harzer und Backlund[2]), andere Methoden; dieselben scheinen mir indess wenig übersichtlich und die Entwicklungen werden dort schliesslich zum Zwecke der praktischen Rechnung im Wesentlichen auf dieselbe Form gebracht, die ich ihnen hier von vornherein gebe.

5. Um die Gleichungen 183) bis 186) zu integriren, ersetzen wir in ihnen die Funktionen Q, P und Z durch die im vorigen Kapitel gefundenen Entwicklungen und erhalten dann Gleichungen, die ihrer Form nach den Gleichungen 4) und 5) des ersten Kapitels analog sind; bei ihrer Integration werden wir das dort Gesagte in Rücksicht ziehen; indessen sind die Gleichungen 183) bis 186) complicirter als die Gleichungen des ersten Kapitels und die letzteren stellen nur ihren allgemeinen Typus dar.

Wie im ersten Kapitel ferner bemerkt wurde, werden wir in ganz allgemeiner Weise unsere Annäherungen nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen anordnen, aber nicht nach den Potenzen der osculirenden elliptischen Werte dieser Grössen, was einer Anordnung nach den Potenzen der störenden Massen gleichkäme, sondern vielmehr nach den Potenzen der Constanten $\varkappa_n$, $\varkappa'_n$, $\sin\iota_n$, $\sin\iota'_n$. Ich werde die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa'$ **Excentricitätsmoduln** und die Grössen $\sin\iota$ und $\sin\iota'$ **Neigungsmoduln** nennen; Gyldén nennt sie diastematische und anastematische Moduln, welche Bezeichnungen hier nicht angängig sind, da ich ihnen nicht die Bedeutung absoluter Elemente im Gyldén'schen Sinne gebe und da ich mich dem üblichen Sprachgebrauche möglichst anschliessen möchte. Ich habe ebenfalls bereits gesagt, dass ich Glied **n-ten Grades** ein jedes Glied nenne, dass als Faktor die **n-te Potenz** eines dieser Moduln oder ein äquivalentes Produkt enthält. Wir werden also zuerst die Glieder nullten, dann diejenigen ersten Grades u. s. f. berechnen.

Ich will im Folgenden mit S_0 den Teil der Funktion S bezeichnen, welcher nullten Grades ist, mit S_1 den Teil, welcher ersten Grades ist, u. s. f.; und in derselben Weise zerlege ich auch die übrigen Funktionen, so dass:

---

1) No. 3346. Vgl. auch den Schluss des Siebenten Kapitels dieser Abhandlung.
2) In ihren pag. 6 und 22 citirten interessanten Abhandlungen.



$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots\cdots$$

$$R = R_0 + R_1 + R_2 + \cdots\cdots$$

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots\cdots$$

$$187) \qquad \frac{dS}{dv} = \left(\frac{dS}{dv}\right)_0 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_1 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_2 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{dS_0}{dv} + \frac{dS_1}{dv} + \frac{dS_2}{dv} + \cdots\cdots$$

u. s. w.,

wobei zu beachten ist, dass z. B. die Grössen $\left(\frac{dS}{dv}\right)_n$ und $\frac{dS_n}{dv}$ im Allgemeinen nicht identisch sind.

§ 2.

Die Glieder nullten Grades.

1. Wir wollen jetzt die Gleichung 183) betrachten, indem wir Q durch seinen Wert 165) resp. 177) ersetzen. Die Funktion $\mathfrak{z}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{Z}$ ist ersten Grades, da sie nach 83) mit $\sin \iota_n$ multiplicirt ist; dagegen enthalten die Funktionen R und K auch Glieder nullten Grades, wie sich bald zeigen wird. Wenn wir also nur die Glieder nullten Grades beibehalten, so ist:

$$188) \quad \frac{1}{(1+S)^3}\frac{dS}{dv} = -\Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0} \sin nw - \Sigma A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 \sin nw + \Sigma n\mu A_{n\cdot 0\cdot 0} K_0 \cos nw$$
$$- \Sigma A^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0^2 \sin nw + \Sigma n\mu A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 K_0 \cos nw + \tfrac{1}{2}\Sigma n^2\mu^2 A_{n\cdot 0\cdot 0} K_0^2 \sin nw,$$

wo nur die Störungen vierter Ordnung vernachlässigt sind.

In den Fällen, in denen die Funktionen R_0 und K_0 als sehr kleine Grössen angesehen werden können, kann man die Annäherungen nach ihren Potenzen anordnen, ebenso wie es in den älteren Methoden geschieht und in der ersten Annäherung setzen:

$$189) \qquad \frac{1}{2(1+S_0)^2} = \text{constans} + \Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0}\int \sin nw\, dv.$$

Indessen können die ebengenannten Funktionen gross sein im Verhältniss zur störenden Masse und es wird sich gleich zeigen, dass dieser Fall eintritt, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers sich einem Bruche von der Form $\frac{n}{n+1}$ nähert. Man wird in diesen Fällen zum Teil die Glieder höherer Ordnung bereits in der ersten Annäherung berücksichtigen müssen; sie sind zwar einstweilen unbekannt, ich werde aber im nächsten Kapitel zeigen, wie man alsdann verfahren kann.

Hier will ich mich zunächst auf die Fälle beschränken, in denen die genannten Grössen sehr klein sind, in denen also die Gleichung 189) für die erste Annäherung besteht.

Das Argument w ist durch die Relation 164)

$$w = (1-\mu_1)v - B - \mu V$$

gegeben, und wir können das Integral in der Gleichung 189) nach einem von Gyldén gefundenen Verfahren partieller Integration ausführen, indem wir schreiben:

$$190)\quad \begin{aligned} \int \sin nw\, dv &= -\frac{1}{n(1-\mu_1)}\cos nw + \frac{\mu}{1-\mu_1}\int \frac{dV}{dv}\sin nw\, dv \\ \int \cos nw\, dv &= \frac{1}{n(1-\mu_1)}\sin nw + \frac{\mu}{1-\mu_1}\int \frac{dV}{dv}\cos nw\, dv, \end{aligned}$$

von welchen Gleichungen ich die zweite deswegen anführe, weil wir sie später brauchen werden. Die Funktion V enthält keine Glieder nullten Grades; sie ist vielmehr ersten Grades in den Fällen, in denen R_0 beträchtlich ist, und sie ist zweiten Grades in allen Fällen, in denen R_0 als Grösse rein erster Ordnung angesehen werden kann. Ich muss der Bequemlichkeit halber diese Thatsache vorwegnehmen aus dem Folgenden, wo sie (pag. 93) bewiesen werden wird. Wenn wir die linke Seite der obigen Gleichung nach Potenzen von S_0 entwickeln, so wird also:

$$S_0 = \text{constans} + \frac{A_{n.0.0}}{n(1-\mu_1)}\cos nw - \tfrac{1}{2}\{3S_0^2 - 4S_0^3 + - \cdots\}.$$

Die Constante in dieser Gleichung ist überzählig und wir wollten sie nach dem vorigen Kapitel so wählen, dass sie eine Grösse rein erster Ordnung ist. Die Divisoren $n(1-\mu_1)$, welche hier auftreten, können nur dann sehr klein sein, wenn die Constante μ_1 sehr nahe gleich Eins ist. Diese Constante ist aber sehr nahe gleich dem Verhältnisse der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers und sie wird ihren grössten Wert erreichen für diejenigen kleinen Planeten, welche Jupiter am nächsten kommen. Für den Planeten Thule, welcher von den bis jetzt entdeckten diese Bedingung am nächsten erfüllt, ist μ_1 etwa gleich $\frac{3}{4}$; es ist aber klar, dass die Convergenz unserer Reihen aufhört, wenn μ_1 sich allzusehr der Einheit nähert, denn unsere Entwicklung der Störungsfunktion beruht ja auf der Bedingung, dass der Quotient $\frac{r}{r'}$ merklich kleiner als Eins ist, welche dann nicht mehr erfüllt wäre. In diesem Falle lässt sich auch nicht mehr — abgesehen von vereinzelten Specialfällen — von einer planetarischen Bewegung sprechen, da der Einfluss Jupiters zu sehr überwiegen würde.

Es folgt aus dem eben Gesagten, dass die Funktion S_0 für alle kleinen Planeten als eine Grösse rein erster Ordnung anzusehen ist, und wir können ihr Quadrat, mindestens in der ersten Annäherung, vernachlässigen. Man hat also für den Fall, dass R_0 und K_0 klein sind:

$$S_0 = \text{constans} + \Sigma \frac{A_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)} \cos nw,$$

S_0 enthält auch keine Glieder der Formen A bis D, sondern nur gewöhnliche Glieder. Setzt man:

191) $$S_0 = \Sigma S_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw,$$

so ist:

192) $$S_{n\cdot 0\cdot 0} = \frac{A_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)},$$

und das constante Glied $S_{0\cdot 0\cdot 0}$ ist zunächst unbestimmt; es ist der Teil der pag. 67 mit a_0 bezeichneten Constante, der nullten Grades ist, und kann erst später bestimmt werden zugleich mit den constanten Teilen von R_0 und $\left(\frac{dW}{dv}\right)_0$.

2. Wir wollen nun die Gleichung 184) betrachten; wenn wir nur die Glieder nullten Grades schreiben, so ist

193) $$\frac{d^2R}{dv^2} + R = -(1+S_0)^2 Q_0 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 + 2S_0' + S_0^2 - (1+S_0)^2 P_0,$$

und im Falle, dass R_0 und K_0 klein genug sind, hat man in der ersten Annäherung

194) $$\frac{d^2R}{dv^2} + R = 2S_0 - P_0 = 2\Sigma S_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw - \Sigma B_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw,$$

und wenn wir setzen:

195) $$\frac{d^2R}{dv^2} + R = \Sigma b_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw,$$

so wird:

196) $$b_{n\cdot 0\cdot 0} = 2S_{n\cdot 0\cdot 0} - B_{n\cdot 0\cdot 0}.$$

Die Gleichung 195) ist von der Form der Gleichung:

197) $$\frac{d^2x}{dv^2} + x = Y,$$

deren Integral das folgende ist:

198) $$x = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

wenn man nämlich setzt:

199) $$\frac{dg_1}{dv} = Y \cos v, \qquad \frac{dg_2}{dv} = Y \sin v,$$

so dass man also nur die Integrationen 199) auszuführen hat.

Wir ersetzen also die Gleichungen 195) durch die folgenden:

$$R_0 = g_1 \sin v - g_2 \cos v \tag{200}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{dv} &= \tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot 0\cdot 0}\cos(nw+v)+\tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot 0\cdot 0}\cos(nw-v) \\ \frac{dg_2}{dv} &= \tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot 0\cdot 0}\sin(nw+v)-\tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot 0\cdot 0}\sin(nw-v). \end{aligned} \tag{200a}$$

Den Integralen der beiden letzten Gleichungen fügen wir keine Integrationsconstanten hinzu, da wir dieselben in die Funktion (ϱ) aufgenommen haben.

Da nun

$$\begin{aligned} \int\cos(nw\pm v)\,dv &= \frac{1}{n(1-\mu_1)\pm 1}\sin(nw\pm v)+\frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm 1}\int\frac{dV}{dv}\cos(nw\pm v)\,dv \\ \int\sin(nw\pm v)\,dv &= -\frac{1}{n(1-\mu_1)\pm 1}\cos(nw\pm v)+\frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm 1}\int\frac{dV}{dv}\sin(nw\pm v)\,dv, \end{aligned} \tag{201}$$

und da die Funktion V keine Glieder nullten Grades enthält, so findet man:

$$\begin{aligned} g_1 &= \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)+1}\sin(nw+v)+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)-1}\sin(nw-v) \\ g_2 &= -\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)+1}\cos(nw+v)+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)-1}\cos(nw-v), \end{aligned} \tag{202}$$

und wenn man diese Werte in 200) einführt und

$$R_0 = \Sigma R_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw \tag{203}$$

setzt, so kommt:

$$\begin{aligned} R_{n\cdot 0\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(1-\mu_1)+1}-\frac{1}{n(1-\mu_1)-1}\right\}b_{n\cdot 0\cdot 0} \\ &= \frac{b_{n\cdot 0\cdot 0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}. \end{aligned} \tag{204}$$

Für den constanten Teil von R_0 hat man offenbar:

$$R_{0\cdot 0\cdot 0} = 2S_{0\cdot 0\cdot 0} - B_{0\cdot 0\cdot 0}. \tag{204a}$$

Die Divisoren, welche in den Relationen 204) auftreten, sind die folgenden:

$$n(1-\mu_1)+1, \qquad n(1-\mu_1)-1, \qquad 1-n^2(1-\mu_1)^2.$$

Der erste von ihnen kann niemals klein sein, wohl aber die beiden anderen, und zwar dann, wenn die Grösse $n(1-\mu_1)$ sich der Einheit nähert. Dies ist aber der Fall:

Ia. Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähert, und wenn $n = 2$
Ib. „ μ_1 „ „ „ $\frac{2}{3}$ „ , „ „ $n = 3$
Ic. „ μ_1 „ „ „ $\frac{3}{4}$ „ , „ „ $n = 4$.

Dies sind die Fälle, in denen die Funktion R_0, und folglich auch K_0, gross ist im Vergleich zur störenden Masse; der erste Fall ist der der Planeten vom Hecubatypus, deren mittlere Bewegung nahe gleich 600″ ist, der zweite ist der der Planeten vom Hildatypus, deren mittlere Bewegung nahe gleich 450″ ist, und der dritte Fall findet beim Planeten Thule statt, dessen mittlere Bewegung nahe gleich 400″ ist, und der übrigens auch deswegen erhebliche Schwierigkeiten bietet, weil er Jupiter sehr nahe kommt, infolge wovon die Glieder in der Entwicklung der Störungsfunktien nach den Potenzen von $\frac{a}{a'}$ resp. $\frac{r}{r'}$ nur langsam fallen. Man wird bemerken, dass in jedem dieser Fälle nur ein einziges Glied in R_0 besonders gross wird und dass dieses von der Form D ist. Ich will diese Planeten die **charakteristischen Planeten der ersten Klasse** nennen; man wird bei ihrer Berechnung bereits in der ersten Annäherung die zweiten Potenzen der Jupitersmasse berücksichtigen müssen, und die Gleichungen 189) und 194) werden hier nicht mehr streng genug sein. Ich werde diese Fälle im nächsten Kapitel behandeln, und mich hier auf diejenigen beschränken, in denen R_0 klein ist.

3. Die Gleichung 185) endlich giebt uns für die Glieder nullten Grades, wenn wir bedenken, dass nach 60) resp. 61) die Funktion Ξ ersten Grades ist:

$$\text{205)} \qquad \frac{dW}{dv} = S_0 - 2R_0 - 2S_0 R_0 + 3R_0^2 \pm \cdots\cdots,$$

also für die erste Annäherung:

$$\text{206)} \qquad \frac{dW}{dv} = S_0 - 2R_0 = \{S_{n\cdot0\cdot0} - 2R_{n\cdot0\cdot0}\}\cos nw.$$

Wir führen die Integration nach der zweiten Relation 190) aus, und erinnern uns wieder, dass die Funktion V mindestens vom ersten Grade ist. Wenn wir dann setzen:

$$\text{207)} \qquad W_0 = W_{0\cdot0\cdot0}\, v + \Sigma W_{n\cdot0\cdot0} \sin nw,$$

so wird:

$$\text{208)} \qquad \begin{aligned} W_{n\cdot0\cdot0} &= \frac{S_{n\cdot0\cdot0} - 2R_{n\cdot0\cdot0}}{n(1-\mu_1)} \\ W_{0\cdot0\cdot0} &= S_{0\cdot0\cdot0} - 2R_{0\cdot0\cdot0} = 2B_{0\cdot0\cdot0} - 3S_{0\cdot0\cdot0}. \end{aligned}$$

Der Divisor $n(1-\mu_1)$ kann niemals klein werden. W_0 enthält also ausser gewöhnlichen Gliedern nur bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse eines von der Form D, das durch R_0 hier eingeführt wird.

Endlich hat man nach der Relation 155)

$$U = \mu W - W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'.$$

Die Funktionen H und H' sind zweiten Grades und die Funktion W' ist mit der Saturnsmasse multiplicirt (vergl. pag. 64); wir vernachlässigen hier diese Grössen und haben:

$$U_0 = \mu W_0. \tag{209}$$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die Funktionen S_0, R_0, W_0 und U_0 nur die Argumente nw enthalten, und da die Grösse $n(1-\mu_1)$, welche der Faktor von v in diesen Argumenten ist, niemals klein sein kann, so schliesst man, dass unter den Gliedern nullten Grades sich keine befinden, welche von langer Periode, d. h. von einer der Formen A oder C sind, auch nicht, wenn es sich um einen charakteristischen Planeten handelt. In allen Fällen wird darum die Funktion V, welche (ausser secularen Gliedern zweiten Grades) nur Glieder dieser beiden Formen enthält, mindestens vom ersten Grade sein. Es ist also[1]):

$$V_0 = 0, \qquad K_0 = \text{p. per.}\, W_0.$$

Nachdem man die Coefficienten $S_{n\cdot0\cdot0}$, $R_{n\cdot0\cdot0}$ und $W_{n\cdot0\cdot0}$ nach den Formeln 192), 204) und 208) in der ersten Annäherung berechnet hat, macht man die zweite Annäherung, indem man die so erhaltenen Werte in die Glieder zweiter Ordnung der Gleichungen 188), 193) und 205) einsetzt; die Relationen 191), 203) und 207) sehen wir als streng an; es handelt sich nur darum die Coefficienten $S_{n\cdot0\cdot0}$, $R_{n\cdot0\cdot0}$ und $W_{n\cdot0\cdot0}$ durch die angegebenen successiven Annäherungen genauer zu bestimmen. Diese Annäherungen führen äusserst schnell zum Ziel, und in fast allen Fällen kann man sich mit der ersten Annäherung begnügen, d. h. die Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigen.

4. Die numerische Berechnung der Funktionen S_0, R_0 und W_0 könnte nach dem Vorigen ohne Schwierigkeiten vor sich gehen, wenn von vornherein die Werte der beiden Constanten α und μ_1 bekannt wären, deren erste bei der Entwicklung der Störungsfunktion auftritt, wo sie zur Berechnung der Coefficienten $A_{n\cdot0\cdot0}$, $B_{n\cdot0\cdot0}$ u. s. w. dient, und deren zweite in den Divisoren vorkommt. Dieselben kennt man aber zunächst nicht und man wird also zu Anfang der Rechnung gewisse Werte für sie anzunehmen haben, mit denen man die Rechnung ausführt. Später bestimmt man ihre genaueren Werte durch Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen und müsste dann die Rechnung mit den letzteren wiederholen, oder doch den berechneten Coefficienten entsprechende Correctionen hinzufügen. Zwischen den beiden genannten Grössen hat man aber die folgenden Relationen, wenn man die Masse des gestörten Körpers vernachlässigt:

1) „p. per." gebrauche ich als Abkürzung für „pars periodica".



$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

210) $$n' = \frac{\sqrt{M'}}{a'^{\frac{3}{2}}}, \qquad n = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}, \qquad M' = k^2(1+m'), \qquad M = k^2$$

$$\mu = \frac{n'}{n}, \qquad \mu^2 = \alpha^3(1+m'), \quad \mu_1 = \mu(1+c_0+\gamma).$$

Wir setzen noch

210a) $$n_1 = \frac{n}{1+c_0+\gamma} \qquad \text{also } \mu_1 = \frac{n'}{n_1},$$

und

211) $$a_1 = \frac{a}{1+\text{p. const. } \varrho} = \frac{a}{1+b_0},$$

wo man a_1 als den Mittelwert des Radiusvektor bezeichnen kann.

Bei den Planeten, deren mittlere Bewegung nicht äusserst nahe commensurabel mit derjenigen Jupiters ist (d. h. bei allen Planeten mit Ausnahme der kritischen) ist $\gamma = 0$; und für c_0 war pag. 92 mit alleiniger Berücksichtigung der Glieder nullter Ordnung der folgende Wert gefunden worden:

$$c_0 = W_{0\cdot0\cdot0} = 2B_{0\cdot0\cdot0} - 3S_{0\cdot0\cdot0}.$$

Man sieht nun in der Regel a (resp. n) als Integrationsconstante an und dann ist a_0 eine überzählige Constante, über die wir verfügen können. Man kann sie auf verschiedene Weisen bestimmen:

I. Man kann

$$a_0 = 0$$

setzen; dann wird

$$S_{0\cdot0\cdot0} = 0, \qquad R_{0\cdot0\cdot0} = -B_{0\cdot0\cdot0}, \qquad W_{0\cdot0\cdot0} = 2B_{0\cdot0\cdot0}.$$

II. Man kann setzen

$$b_0 = 0.$$

Dann wird

$$S_{0\cdot0\cdot0} = \tfrac{1}{2}B_{0\cdot0\cdot0}, \qquad R_{0\cdot0\cdot0} = 0, \qquad W_{0\cdot0\cdot0} = \tfrac{1}{2}B_{0\cdot0\cdot0}$$
$$a_1 = a.$$

III. Man kann setzen

$$c_0 = 0.$$

Dann wird

$$S_{0\cdot0\cdot0} = \tfrac{2}{3}B_{0\cdot0\cdot0}, \qquad R_{0\cdot0\cdot0} = \tfrac{1}{3}B_{0\cdot0\cdot0}, \qquad W_{0\cdot0\cdot0} = 0$$
$$n_1 = \frac{n}{1+\gamma} \qquad \mu_1 = \mu(1+\gamma).$$

IV. Man kann endlich a_0 als Integrationsconstante (an Stelle von a) ansehen und kann dann über a resp. n (innerhalb gewisser enger Grenzen) verfügen. Hierbei wird man also a_0 als unbestimmte Grösse in den Formeln beizubehalten haben und es später aus den Beobachtungen bestimmen. Hat man es bestimmt, so sind auch die Grössen b_0 und c_0 bekannt. Findet man nun aus den Beobachtungen a_0 als eine Grösse rein erster Ordnung, so kann man den anfänglich gewählten Wert von a beibehalten, und braucht die Entwicklung der Störungsfunktion nicht zu wiederholen resp. die Coefficienten $A_{n\cdot 0\cdot 0}$, $B_{n\cdot 0\cdot 0}$ etc. nicht zu verbessern, was häufig von bedeutendem Vorteil ist. Zeigt sich indessen, dass a_0 grösser ausfällt, so muss es durch neue Wahl von a und n verkleinert werden, wozu ausser den vorstehenden die Relationen 210c) resp. 211) dienen, wobei man a_1 oder n_1 unverändert lassen kann.

Wir wollen für unsere Untersuchungen den dritten Fall wählen, also $c_0 = 0$ setzen; dann sind nämlich für alle nicht kritischen Planeten die folgenden Gleichungen erfüllt

$$
212)\qquad \begin{aligned} n_1 &= n, & n_1 &= \frac{\sqrt{M}}{a_1^{\frac{3}{2}}} \\ \mu_1 &= \mu, & \mu_1^2 &= \alpha^2(1+m'). \end{aligned}
$$

Diese Wahl ist für uns deswegen von Vorteil, weil wir Tafeln berechnen wollen, welche die Coefficienten der Störungsglieder geben. Diese Tafeln enthalten streng genommen die beiden Argumente α und μ_1 (resp. a und n_1); durch die letztangeführten Relationen werden sie aber in einfacher Weise auf eines reducirt. Für die kritischen Planeten lässt sich diese Reduktion nicht ausführen, für sie würde man stets mit zwei Argumenten zu operiren haben. Doch fassen wir bei der Aufstellung der Tafeln die kritischen Planeten aus leicht fasslichen Gründen zunächst nicht ins Auge. Für sie ist mit Annahme des dritten der oben genannten Fälle

$$
212\text{a})\qquad \begin{aligned} n_1 &= \frac{n}{1+\gamma}, \qquad \mu_1 = \mu(1+\gamma) \\ \mu_1^2 &= \alpha^2(1+\gamma)^2(1+m'). \end{aligned}
$$

§ 3.

Die Glieder ersten Grades.

1. Bei der Berechnung der Glieder ersten Grades, wollen wir, wie im Vorigen, zunächst die charakteristischen Planeten der ersten Klasse bei Seite lassen, so dass alle Funktionen nullten Grades (S_0, R_0 u. s. w.) als rein erster Ordnung anzusehen sind. Ich will aber noch eine weitere Einschränkung machen, indem wir voraussetzen wollen, dass auch die Funktionen ersten Grades S_1, R_1, W_1, U_1 und $\mathfrak{Z}_1$ nicht erheblich grösser sind als die störende Masse; ich schliesse

damit noch eine zweite Klasse von charakteristischen Planeten aus, die ich gleich näher bezeichnen will.

Nach diesen Voraussetzungen können wir in der ersten Annäherung die Glieder zweiter Ordnung bei Seite lassen und die Gleichung 183) wie folgt schreiben, wenn wir nur die Glieder ersten Grades nehmen:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_1 = -\Sigma A^{(+1)}_{n.1.0}\eta \sin(nw+\mathrm{v}) - \Sigma A^{(+1)}_{n.0.1}\eta' \sin(nw+\mathrm{v}_1)$$
$$-\Sigma A^{(-1)}_{n.1.0}\eta \sin(nw-\mathrm{v}) - \Sigma A^{(-1)}_{n.0.0}\eta' \sin(nw-\mathrm{v}_1). \tag{213}$$

Wir haben also die Quadraturen

$$\int \eta \sin(nw \pm \mathrm{v})\, dv \qquad \text{und} \qquad \int \eta' \sin(nw \pm \mathrm{v}_1)\, dv$$

auszuführen. Gyldén hat gezeigt, wie man dieselben partiell ausführen kann, indem man zuvörderst η, Π_0, η', Π_0' als constant ansieht; ich will ein nur wenig verändertes Verfahren anwenden, indem ich die folgenden Formeln benutze:

$$\int \eta \sin(nw \pm \mathrm{v})dv = \eta \cos\Pi \int \sin(nw \pm v)dv \mp \eta \sin\Pi \int \cos(nw \pm v)\, dv$$
$$-\int \frac{d\eta \cos\Pi}{dv} \int \sin(nw \pm v)\, dv^2 \pm \int \frac{d\eta \sin\Pi}{dv} \int \cos(nw \pm v)\, dv^2,$$

oder

$$\int \eta \sin(nw \pm \mathrm{v})\, dv = \eta \cos\Pi \int \sin(nw \pm v)\, dv \mp \eta \sin\Pi \int \cos(nw \pm v)\, dv$$
$$-\frac{d\eta \cos\Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm v)\, dv^2 \pm \frac{d\eta \sin\Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm v)\, dv^2$$
$$+\frac{d^2\eta \cos\Pi}{dv^2} \iiint \sin(nw \pm v)\, dv^3 \mp \frac{d^2\eta \sin\Pi}{dv^2} \iiint \cos(nw \pm v)\, dv^3 \tag{214}$$
$$\pm \cdots\cdots$$

$$\int \eta' \sin(nw \pm \mathrm{v}_1)\, dv = \eta' \cos\Pi_1 \int \sin(nw \pm v)\, dv \mp \eta' \sin\Pi_1 \int \cos(nw \pm v)\, dv$$
$$-\frac{d\eta' \cos\Pi_1}{dv} \iint \sin(nw \pm v)\, dv^2 \pm \frac{d\eta' \sin\Pi_1}{dv} \iint \cos(nw \pm v)\, dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots,$$

zu welchen Relationen ich die entsprechenden:

$$\int \eta \cos(nw \pm \mathrm{v})\, dv = \eta \cos\Pi \int \cos(nw \pm v)\, dv \pm \eta \sin\Pi \int \sin(nw \pm v)\, dv$$
$$-\frac{d\eta \cos\Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm v)\, dv \mp \frac{d\eta \sin\Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm v)\, dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots$$

$$\int \eta' \cos(nw \pm \mathrm{v}_1)\, dv = \eta' \cos\Pi_1 \int \cos(nw \pm v)\, dv \pm \eta' \sin\Pi_1 \int \sin(nw \pm v)\, dv$$
$$\mp \cdots\cdots$$

hinzufüge, da wir sie später brauchen werden.

Die Funktionen $\eta \frac{\cos}{\sin} \Pi$ und $\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi_1$ werden nun bei jeder Differentiation mit einer der kleinen Grössen ς_n multiplicirt; das angewandte Integrationsverfahren führt also äusserst schnell zum Ziele, wenn nicht die betreffenden Glieder durch die Ausführung der Integrationen $\int \frac{\cos}{\sin} (nw \pm v)\, dv$ erheblich vergrössert werden; dies ist aber nur der Fall für die charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und auch bei diesen ist die Abnahme der Glieder noch stark genug; in den Fällen, die wir jetzt behandeln, braucht man wohl stets nur die erste Zeile in den vorstehenden Relationen zu berücksichtigen.

Wir erinnern uns der Relationen 201) und schreiben also in der ersten Annäherung, da V mindestens ersten Grades ist:

$$
\text{214a)} \quad
\begin{aligned}
\int \eta \sin(nw \pm \mathrm{v})\, dv &= -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1}\, \eta \cos(nw \pm \mathrm{v}) \\
\int \eta' \sin(nw \pm \mathrm{v}_1)\, dv &= -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1}\, \eta' \cos(nw \pm \mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

Wenn wir setzen

$$
\text{215)} \quad
\begin{aligned}
S_1 = {} & \Sigma S^{(+1)}_{n.1.0}\, \eta \cos(nw + \mathrm{v}) && + \Sigma S^{(+1)}_{n.0.1}\, \eta' \cos(nw + \mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma S^{(-1)}_{n.1.0}\, \eta \cos(nw - \mathrm{v}) && + \Sigma S^{(-1)}_{n.0.1}\, \eta' \cos(nw - \mathrm{v}_1),
\end{aligned}
$$

so wird also:

$$
\text{215a)} \quad
\begin{aligned}
S^{(+1)}_{n.1.0} &= \frac{A^{(+1)}_{n.1.0}}{n(1-\mu_1)+1}, \qquad & S^{(+1)}_{n.0.1} &= \frac{A^{(+1)}_{n.0.1}}{n(1-\mu_1)+1} \\
S^{(-1)}_{n.1.0} &= \frac{A^{(-1)}_{n.1.0}}{n(1-\mu_1)-1}, \qquad & S^{(-1)}_{n.0.1} &= \frac{A^{(-1)}_{n.0.1}}{n(1-\mu_1)-1}.
\end{aligned}
$$

Man ersieht, dass die Funktion S_1 dieselben Divisoren enthält wie R_0, also auch in denselben Fällen beträchtlich wird, d. h. bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse und zwar wird sie bei diesen Planeten Glieder der Form C enthalten.

2. Wir gehen jetzt zur Gleichung 184) für ϱ über und schreiben mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung:

$$
\text{216)} \quad \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho = -Q_0 \frac{d(\varrho)}{dv} + 2S_1 - P_1;
$$

da aber mit Vernachlässigung von Gliedern rein erster Ordnung:

$$
\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta \sin \mathrm{v},
$$

so wird, wenn wir für Q_0, S_1 und P_1 ihre oben gefundenen Werte einsetzen:



217) $$\frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = \Sigma b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) + \Sigma b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) + \Sigma b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) + \Sigma b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1),$$

wo

217a) $$b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = 2S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}-B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}-\tfrac{1}{2}A_{n\cdot 0\cdot 0}, \qquad b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = 2S^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}-B^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$
$$b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = 2S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}-B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}+\tfrac{1}{2}A_{n\cdot 0\cdot 0}, \qquad b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = 2S^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}-B^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}.$$

Jetzt haben wir die Funktion ϱ in ihre beiden Teile (ϱ) und R zu zerlegen, da nach unserer Definition (ϱ) alle Glieder der Form B:

$$\cos[(1-\sigma_n)v-\Gamma_n]$$

enthalten soll. Wenn wir uns erinnern, dass

$$nw\pm\mathrm{v} = n(1-\mu_1)v-nB-n\mu V\pm(v-\Pi)$$
$$nw\pm\mathrm{v}_1 = n(1-\mu_1)v-nB-n\mu V\pm(v-\Pi_1),$$

so sehen wir, dass diese Argumente von der erwähnten Form sind, wenn $n=0$, ganz unabhängig von dem Werte von μ_1; diese Glieder werden also für alle Planeten die gleichen sein. Da nach dem vorigen Kapitel $b^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 0}=0$ und $b^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1}=0$, so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

218) $$\frac{d^2R}{dv^2}+R = \sum_1^\infty b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) + \sum_1^\infty b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) + \sum_1^\infty b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) + \sum_1^\infty b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1)$$

219) $$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2}+(\varrho) = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\,\eta\cos\mathrm{v}+b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos\mathrm{v}_1.$$

Wir wollen zuerst die Gleichung 218) integriren, indem wir uns der Beziehungen 197) bis 199) erinnern. Demnach setzen wir:

220) $$R_1 = g_1\sin v-g_2\cos v$$

220a) $$\frac{dg_1}{dv} = \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\{\eta\cos(nw+\mathrm{v}+v)+\eta\cos(nw+\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\{\eta\cos(nw-\mathrm{v}+v)+\eta\cos(nw-\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\{\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1+v)+\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\{\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1+v)+\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1-v)\}$$
$$\frac{dg_2}{dv} = \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\{\eta\sin(nw+\mathrm{v}+v)-\eta\sin(nw+\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\{\eta\sin(nw-\mathrm{v}+v)-\eta\sin(nw-\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\{\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1+v)-\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\{\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1+v)-\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1-v)\}.$$

Um die letzteren Gleichungen zu integriren, verfahre ich auf dieselbe Weise wie oben zur Herstellung der Relationen 214), 190) und 201). Man erhält dann die folgenden Formeln:

$$\int \eta \sin[nw \pm (\mathrm{v}+v)]\,dv = \eta\cos\Pi\int\sin(nw\pm 2v)\,dv \mp \eta\sin\Pi\int\cos(nw\pm 2v)\,dv - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint\sin(nw\pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint\cos(nw\pm 2v)\,dv^2 \pm \cdots\cdots$$

$$\int \eta \sin[nw \pm (\mathrm{v}-v)]\,dv = \eta\cos\Pi\int\sin nw\,dv \mp \eta\sin\Pi\int\cos nw\,dv - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint\sin nw\,dv^2 \pm \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint\cos nw\,dv^2 \pm \cdots\cdots \tag{221}$$

$$\int \eta \cos[nw \pm (\mathrm{v}+v)]\,dv = \eta\cos\Pi\int\cos(nw\pm 2v)\,dv \pm \eta\sin\Pi\int\sin(nw\pm 2v)\,dv - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint\cos(nw\pm 2v)\,dv^2 \mp \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint\sin(nw\pm 2v)\,dv^2 \pm \cdots\cdots$$

$$\int \eta \cos[nw \pm (\mathrm{v}-v)]\,dv = \eta\cos\Pi\int\cos nw\,dv \pm \eta\sin\Pi\int\sin nw\,dv - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint\cos nw\,dv^2 \mp \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint\sin nw\,dv^2 \pm \cdots\cdots.$$

Für die Integrale $\int \eta' \sin[nw \pm (\mathrm{v}_1 + v)]\,dv$ u. s. w. findet man ganz analoge Ausdrücke, man hat nur η durch η' und Π durch Π_1 zu ersetzen.

Weiter ist:

$$\int {\sin \atop \cos} nw\,dv = \mp\frac{1}{n(1-\mu_1)} {\cos \atop \sin} nw + \frac{\mu}{1-\mu_1}\int\frac{dV}{dv}{\sin \atop \cos} nw\,dv$$

$$\int\sin(nw\pm 2v)\,dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1)\pm 2}\cos(nw\pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm 2}\int\frac{dV}{dv}\sin(nw\pm 2v)\,dv \tag{222}$$

$$\int\cos(nw\pm 2v)\,dv = \frac{1}{n(1-\mu_1)\pm 2}\sin(nw\pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm 2}\int\frac{dV}{dv}\cos(nw\pm 2v)\,dv.$$

Die Divisoren, welche in diesen Ausdrücken auftreten, sind:

$$n(1-\mu_1), \qquad n(1-\mu_1)+2, \qquad n(1-\mu_1)-2.$$

Da n nicht den Wert Null annimmt, so ist der letztere der einzige, welcher sehr klein sein kann; er wird es in den folgenden Fällen sein:

Ia. Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähert, und wenn $n = 4$
Ib. „ μ_1 „ „ „ $\frac{2}{3}$ „ , „ „ $n = 6$
Ic. „ μ_1 „ „ „ $\frac{3}{4}$ „ , „ „ $n = 8$.



Das sind aber wieder die Fälle der charakteristischen Planeten der ersten Klasse. Der genannte Divisor wird aber auch in den folgenden Fällen klein sein:

IIa. Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{3}$ nähert, und wenn $n = 3$

IIb. „ μ_1 „ „ „ $\frac{3}{5}$ „ , „ „ $n = 5$

. . . .

Ich will die Planeten, für welche eine der Bedingungen II. erfüllt ist, **charakteristische Planeten der zweiten Klasse** nennen. Handelt es sich um einen der letzteren, so sind die Funktionen S_0, S_1, R_0 und W_0 rein erster Ordnung, während in S Glieder vom zweiten Grade ab, und in R und W vom ersten Grade ab beträchtlich sind. Die Funktion R_1 enthält bei den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse ausser gewöhnlichen Gliedern nur solche der Form D, bei denen der ersten Klasse jedoch auch solche der Form C, die durch S eingeführt werden. Wir wollen gegenwärtig auch die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse bei Seite lassen. Dann werden die Ausdrücke 221) äusserst stark abnehmen, und wir können, wenn wir nicht einen sehr hohen Grad von Genauigkeit anstreben, die Glieder vernachlässigen, welche die Ableitungen der Grössen $\eta \cos \Pi$, $\eta \sin \Pi$ u. s. w. enthalten. Man erhält:

223)
$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\left\{\frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}+v)}{n(1-\mu_1)+2} \pm \frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}-v)}{n(1-\mu_1)}\right\} \\ &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\left\{\frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}+v)}{n(1-\mu_1)} \pm \frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}-v)}{n(1-\mu_1)-2}\right\} \\ &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\left\{\frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}_1+v)}{n(1-\mu_1)+2} \pm \frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}_1-v)}{n(1-\mu_1)}\right\} \\ &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\left\{\frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}_1+v)}{n(1-\mu_1)} \pm \frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}_1-v)}{n(1-\mu_1)-2}\right\}, \end{aligned}$$

und wenn wir setzen:

224)
$$\begin{aligned} R_1 = &\sum_1^\infty R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) + \sum_1^\infty R^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \\ &+ \sum_1^\infty R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) + \sum_1^\infty R^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1), \end{aligned}$$

so ist:

224a)
$$R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n(1-\mu_1)+2} - \frac{1}{n(1-\mu_1)}\right] b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}$$
$$R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n(1-\mu_1)} - \frac{1}{n(1-\mu_1)-2}\right] b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}.$$
$$R^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}$$
$$R^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}.$$

3. Jetzt wollen wir die Gleichung 219) integriren. Hierbei können wir die Relationen 221) nicht anwenden, wenn wir das Auftreten secularer Glieder vermeiden wollen. Gyldén hat gezeigt, wie man das Integral dieser Gleichung in rein periodischer Form erhalten kann, indem man die elementaren Glieder an Stelle der secularen einführt, und zwar lässt sich die Integration sehr einfach ausführen; da wir (ϱ) unter der Form:

$$(\varrho) = \eta \cos \mathrm{v} = \varkappa \cos(v-\varpi) + \Sigma \varkappa_n \cos(v-\varpi_n)$$

darstellen wollen, so differenziren wir diesen Ausdruck zweimal und finden

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} = (1-\varsigma)^2 \varkappa \cos(v-\varpi) + \Sigma(1-\varsigma_n)^2 \varkappa_n \cos(v-\varpi_n).$$

Nach den Relationen 154) ist aber:

$$\eta' \cos \mathrm{v}_1 = \eta' \cos \Pi_1 \cos v + \eta' \sin \Pi_1 \sin v = \Sigma \varkappa'_n \cos(v-\varpi_n).$$

Setzt man die vorstehenden Werte in die Gleichung 219) ein, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten $\varkappa_n$ folgende Gleichung:

$$(2\varsigma-\varsigma^2)\varkappa\cos(v-\varpi) + \Sigma(2\varsigma_n-\varsigma_n^2)\varkappa_n\cos(v-\varpi_n) = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa\cos(v-\varpi) + \Sigma\left\{b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa_n + b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n\right\}\cos(v-\varpi_n),$$

woraus man schliesst:

225)
$$(2\varsigma-\varsigma^2)\varkappa = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa$$
$$(2\varsigma_n-\varsigma_n^2)\varkappa_n = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa_n + b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n.$$

Wir bestimmen demnach die Grösse ς aus der Gleichung:

225a)
$$2\varsigma-\varsigma^2 = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0},$$

womit $\varkappa$ und Γ in der That die beiden Integrationsconstanten werden. Für die $\varkappa_n$ hat man folgende Werte:

226)
$$\varkappa_n = \frac{b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n}{2\varsigma_n-\varsigma_n^2-b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}} = \frac{b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n}{2(\varsigma_n-\varsigma)-(\varsigma_n^2-\varsigma^2)} = \frac{b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n}{2(\varsigma_n-\varsigma)\left[1-\frac{\varsigma_n+\varsigma}{2}\right]}.$$

Die Differenz $\varsigma_n - \varsigma$ ist eine Grösse rein erster Ordnung; die Coefficienten $\varkappa_n$ sind also nullter Ordnung, d. h. elementar. Die Constante ς kommt unter den ς_n nicht vor, und darum wird auch die Differenz $\varsigma_n - \varsigma$ im Allgemeinen nicht gleich Null sein. Es scheint indessen, dass in Ausnahmefällen die eine oder die andere der Constanten ς_n ihrem Werte nach so nahe ς kommen könne, dass daraus ausserordentlich grosse Werte der entsprechenden $\varkappa_n$ resultiren. Ueber diese Fälle zu sprechen, werde ich im achten Kapitel Gelegenheit nehmen, ebenso wie von der Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form.

4. Für die Funktion W haben wir endlich:

$$\frac{dW}{dv} = S_1 - 2R_1 + (6R_0 - 2S_0)\,\eta\cos \mathrm{v} - \frac{d\Xi_1}{dv},$$

und wenn wir die für R und S gefundenen Werte einsetzen, so ist:

227)
$$\begin{aligned}\frac{dW}{dv} = {} & \sum T^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) && + \sum T^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1)\\ & + \sum T^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) && + \sum T^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1)\\ & - \frac{d\Xi_1}{dv},\end{aligned}$$

wo

227a)
$$\begin{aligned}T^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} &= S^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} - 2R^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} + 3R_{n\cdot0\cdot0} - S_{n\cdot0\cdot0}\\ T^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} &= S^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} - 2R^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} + 3R_{n\cdot0\cdot0} - S_{n\cdot0\cdot0}\\ T^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} &= S^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} - 2R^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\\ T^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} &= S^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} - 2R^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}.\end{aligned}$$

Die Gleichung 227) integriren wir gerade wie die Gleichung 213), indem wir, wie 214a), schreiben:

$$\begin{aligned}\int\eta\cos(nw\pm\mathrm{v})\,dv &= \frac{1}{n(1-\mu_1)\pm1}\,\eta\sin(nw\pm\mathrm{v})\\ \int\eta'\cos(nw\pm\mathrm{v}_1)\,dv &= \frac{1}{n(1-\mu_1)\pm1}\,\eta'\sin(nw\pm\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Wenn wir also setzen:

228)
$$\begin{aligned}W_1 = {} & \sum W^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\sin(nw+\mathrm{v}) && + \sum W^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1)\\ & + \sum W^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\sin(nw-\mathrm{v}) && + \sum W^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1)\\ & - \Xi_1,\end{aligned}$$

so wird:

228a)
$$W^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{T^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}}{n(1-\mu_1)+1}, \qquad W^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} = \frac{T^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}}{n(1-\mu_1)+1}$$
$$W^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{T^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}}{n(1-\mu_1)-1}, \qquad W^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} = \frac{T^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}}{n(1-\mu_1)-1}.$$

Die Funktion Ξ_1 endlich findet man mit Hilfe der Relation 60). Wenn man dort nur die Glieder ersten Grades berücksichtigt und diejenigen rein zweiter Ordnung fortlässt, so wird:

228b)
$$\Xi_1 = 2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos v + 2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin v.$$

Der numerische Betrag derselben ist so klein, dass man sie wohl stets bei Seite lassen kann.

Für die Funktion U ergiebt sich dann

229)
$$U_1 = \mu W_1,$$

und da unter den Gliedern ersten Grades in W bei den allgemeinen Planeten nur gewöhnliche Glieder sich befinden, so ist auch:

229a)
$$K_1 = W_1, \qquad V_1 = 0.$$

5. Wir wollen nun die Gleichung 186) mit bezug auf die Glieder ersten Grades integriren. Wenn wir wieder von den charakteristischen Planeten absehen, so ist in der ersten Annäherung zu setzen, da $\mathfrak{z}$ ersten Grades ist:

230)
$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -Q_0\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + Z_1,$$

und da mit Vernachlässigung der Glieder rein erster Ordnung:

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j\cos\mathfrak{v},$$

so wird, wenn wir für Q_0 und Z_1 ihre Werte einsetzen:

231)
$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = \sum c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}) \qquad + \sum c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \sum c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}) \qquad + \sum c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1),$$

wo:

231a)
$$c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} = C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}A_{n\cdot0\cdot0}, \qquad c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} = C^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}$$
$$c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} = C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}A_{n\cdot0\cdot0}, \qquad c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} = C^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}.$$

Die Gleichung 231) integriren wir dann gerade wie die Gleichung 216) für ρ. Die in 231) vorkommenden Argumente werden auch hier elementar für $n = 0$. Wir zerlegen also, da $c^{(-1)}_{0\cdot1\cdot0}$ und $c^{(-1)}_{0\cdot0\cdot1}$ gleich Null sind, diese Gleichungen in die beiden folgenden:

$$232)\quad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z} = \sum_1^\infty c^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\sin j \sin(nw+\mathfrak{v}) \quad +\sum_1^\infty c^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\sin j' \sin(nw+\mathfrak{v}_1)$$
$$+\sum_1^\infty c^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\sin j \sin(nw-\mathfrak{v}) \quad +\sum_1^\infty c^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\sin j' \sin(nw-\mathfrak{v}_1)$$

$$233)\quad \frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2}+(\mathfrak{z}) = c^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\sin j \sin\mathfrak{v} \quad + c^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\sin j' \sin\mathfrak{v}_1.$$

Wenn wir 232) in der Form:

$$232a)\quad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z} = Y$$

schreiben, so wird wieder [1]):

$$234)\quad \mathfrak{Z} = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

wo zu setzen ist:

$$\frac{dg_1}{dv} = Y\cos v, \qquad \frac{dg_2}{dv} = Y\sin v.$$

Man hat also zu nehmen:

$$234a)\quad \left.\begin{matrix}\frac{dg_1}{dv}\\ \frac{dg_2}{dv}\end{matrix}\right\} = \pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\left\{\sin j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw+\mathfrak{v}+v) \pm \sin j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw+\mathfrak{v}-v)\right\}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\left\{\sin j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw-\mathfrak{v}+v) \pm \sin j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw-\mathfrak{v}-v)\right\}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\left\{\sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw+\mathfrak{v}_1+v) \pm \sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw+\mathfrak{v}_1-v)\right\}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\left\{\sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw-\mathfrak{v}_1+v) \pm \sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw-\mathfrak{v}_1-v)\right\}.$$

In Analogie mit den Gleichungen 221) haben wir aber:

$$\int \sin j \sin[nw\pm(\mathfrak{v}+v)]\,dv = \sin j\cos\sigma\int\sin(nw\pm 2v)\,dv \mp \sin j \sin\sigma\int\cos(nw\pm 2v)\,dv$$
$$-\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\iint\sin(nw\pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\iint\cos(nw\pm 2v)\,dv^2$$
$$\pm\cdots\cdots$$

235)

$$\int \sin j \sin[nw\pm(\mathfrak{v}-v)]\,dv = \sin j\cos\sigma\int\sin nw\,dv \mp \sin j\sin\sigma\int\cos nw\,dv$$
$$-\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\iint\sin nw\,dv^2 \pm \frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\iint\cos nw\,dv^2$$
$$\pm\cdots\cdots$$

1) Die Bezeichnungen g_1 und g_2 brauche ich hier, wie oben, nur vorübergehend.

$$\int \sin j \cos[nw \pm (\mathfrak{v}+v)]\,dv = \sin j \cos\sigma \int \cos(nw \pm 2v)\,dv \pm \sin j \sin\sigma \int \sin(nw \pm 2v)\,dv$$
$$-\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\iint \cos(nw \pm 2v)\,dv^2 \mp \frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\iint \sin(nw \pm 2v)\,dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots$$

235)
$$\int \sin j \cos[nw \pm (\mathfrak{v}-v)]\,dv = \sin j \cos\sigma \int \cos nw\,dv \pm \sin j \sin\sigma \int \sin nw\,dv$$
$$-\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\iint \cos nw\,dv^2 \mp \frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\iint \sin nw\,dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots.$$

Die weitere Integration findet mit Anwendung der Relationen 222) statt und es treten hier dieselben Divisoren

$$n(1-\mu_1), \qquad n(1-\mu_1)+2, \qquad n(1-\mu_1)-2$$

auf wie in der Funktion R_1. $\mathfrak{Z}_1$ enthält also, wie R_1, merklich grosse Glieder, wenn es sich um charakteristische Planeten der ersten oder zweiten Klasse handelt.

Es wird endlich, wenn man die Rechnungen in der angegebenen Weise ausführt:

236)
$$\mathfrak{Z}_1 = \Sigma Z^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \sin j \sin(nw+\mathfrak{v}) + \Sigma Z^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \sin j' \sin(nw+\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma Z^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \sin j \sin(nw-\mathfrak{v}) + \Sigma Z^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \sin j' \sin(nw-\mathfrak{v}_1),$$

wo

236a)
$$Z^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}, \qquad Z^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}$$
$$Z^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}, \qquad Z^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}.$$

6. Zur Integration der Gleichung 233) erinnern wir uns, dass wir $(\mathfrak{z})$ unter der Form

$$(\mathfrak{z}) = \sin j \sin\mathfrak{v} = \sin\iota \sin(v-\vartheta) + \Sigma \sin\iota_n \sin(v-\vartheta_n)$$

darstellen wollen, wonach

$$\frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2} = -(1+\tau)^2 \sin\iota\sin(v-\vartheta) - \Sigma(1+\tau_n)^2 \sin\iota_n \sin(v-\vartheta_n).$$

Ferner folgt aus den Relationen 171) und 173)

$$\sin j' \sin\mathfrak{v}_1 = \sin j' \cos\sigma_1 \sin v - \sin j' \sin\sigma_1 \cos v = \Sigma \sin\iota'_n \sin(v-\vartheta_n).$$

Setzt man diese letzteren Werte in Gleichung 233) ein, so erhält man zur Bestimmung der $\sin\iota_n$ folgende Gleichung:

$$(2\tau+\tau^2)\sin\iota\sin(v-\vartheta) + \Sigma(2\tau_n+\tau_n^2)\sin\iota_n\sin(v-\vartheta_n) =$$
$$= -c^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\sin\iota\sin(v-\vartheta) - \Sigma\left\{c^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\sin\iota_n + c^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\sin\iota'_n\right\}\sin(v-\vartheta_n),$$

woraus man schliesst:

$$237)\quad \begin{aligned} &2\tau+\tau^2 = -c_{0\cdot1\cdot0}^{(+1)} \\ &\sin\iota_n = -\frac{c_{0\cdot0\cdot1}^{(+1)}\sin\iota_n'}{2\tau_n+\tau_n^2+c_{0\cdot1\cdot0}^{(+1)}} = \frac{c_{0\cdot0\cdot1}^{(+1)}\sin\iota_n'}{2(\tau-\tau_n)+(\tau^2-\tau_n^2)} = \frac{c_{0\cdot0\cdot1}^{(+1)}\sin\iota_n'}{2(\tau-\tau_n)\left[1+\frac{\tau+\tau_n}{2}\right]} \end{aligned}$$

Es gelten für die τ_n und die $\sin\iota_n$ dieselben Bemerkungen, die wir schon anlässslich der ς_n und $\varkappa_n$ gemacht haben; ich will nur bemerken, dass τ' gleich Null ist, auch wenn man die Bewegung Jupiters nicht als elliptisch ansieht; eine Thatsache, die aus der Theorie der gegenseitigen Störungen der grossen Planeten folgt.

7. Es lassen sich nun auch ohne Schwierigkeiten nach 96) die Funktionen $\sin i \sin\Sigma$ und $\sin i\cos\Sigma$ bis auf Glieder zweiten Grades exclusive, sowie der Ausdruck 92) für die Länge l und nach 100) auch die Funktion $\Omega-\Sigma$ bis auf Glieder zweiten Grades inclusive berechnen. Ich gehe auf diese Operationen hier nicht des Näheren ein, da sie auf der Hand liegen; auch würde die analytische Darstellung unnütz weitläufig werden, während sich die numerische Berechnung äusserst einfach gestaltet, da man überall die Glieder, welche unwesentlich sind, sofort bei Seite lassen kann.

§ 4.

Die Glieder zweiten Grades.

1. Unter den Gliedern nullten und ersten Grades, welche wir bisher behandelt haben, fanden sich ausser gewöhnlichen Gliedern solche der Form B, welche stets ersten Grades sind und bei allen Planeten in gleicher Weise auftreten; ferner traten, insofern es sich um charakteristische Planeten handelt, Glieder der Formen C und D auf. Solche der Form A jedoch fanden sich nicht vor; dieselben sind demnach mindestens zweiten Grades, und wir werden jetzt mit ihnen zu thun haben. Sind die Excentricitäts- und Neigungsmoduln sämmtlicher störender Körper gleich Null, so treten gar keine Glieder der Form A auf.

Bei der Darstellung der Glieder zweiten Grades will ich nicht so weit ins Einzelne gehen, wie ich es bisher gethan habe, da ich sonst die analytische Entwicklung weit ausführlicher machen müsste, als man ihrer je benötigen wird. Nur bei grossen Excentricititäten und Neigungen wird man überhaupt auf diese Glieder Rücksicht nehmen und auch dann nur auf einen kleinen Teil derselben.

Ich setze wieder voraus, dass die Funktionen S_0, S_1, S_2, R_0, R_1, R_2 und U_0, U_1, U_2 als rein erster Ordnung angesehen werden können, schliesse also die charakteristischen Planeten vorläufig aus.

Zur Bestimmung von S_2 haben wir dann nach Gleichung 183)

$$\frac{dS}{dv} = -Q_2 - \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Ich will nun den Teil der Funktion S_2, der von der Form A ist, von den übrigen Gliedern trennen und zu diesem Zweck eine Bezeichnung anwenden, welche Gyldén zuerst in ähnlicher Weise gebraucht hat. Ich bezeichne nämlich allgemein mit

$$T_a F, \qquad T_b F, \qquad T_c F, \qquad T_d F$$

den bez. Teil einer jeden Funktion F, der von der Form A, B, C oder D ist und mit $T_g F$ den Teil, der sich aus den gewöhnlichen Gliedern zusammensetzt, so dass die Identität

$$F = T_a F + T_b F + T_c F + T_d F + T_g F$$

für jede Funktion erfüllt ist, die weder eine Constante noch einen secularen Teil enthält.

Hiernach zerlegt sich die obige Gleichung für S_2 in die beiden folgenden:

$$238)\qquad T_a \frac{dS}{dv} = -T_a Q_2 - \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}$$

$$239)\qquad \frac{dS}{dv} = -Q_2,$$

wo in der letzteren die Glieder der Form A zu unterdrücken sind. Aus den Ausdrücken 165) und 177) für Q entnehmen wir, dass nur aus den vier Summen

$$\Sigma A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \qquad \text{und} \qquad \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1)$$
$$\Sigma \bar{A}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \qquad \text{und} \qquad \Sigma \bar{A}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw - \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1)$$

Glieder der Form A entstehen können, nämlich wenn $n = 0$. Da aber die Coefficienten $A^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$, $\bar{A}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ und $\bar{A}^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ gleich Null sind, so wird

$$240)\qquad T_a Q_2 = A^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}_1).$$

In Gleichung 239) hat man also zu setzen:

$$
\begin{aligned}
241)\quad Q_2 = {} & \Sigma A_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\sin nw & & + \Sigma \bar{A}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin nw \\
& + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\sin(nw + 2\mathrm{v}) & & + \Sigma \bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin(nw + 2\mathfrak{v}) \\
& + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\sin(nw - 2\mathrm{v}) & & + \Sigma \bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin(nw - 2\mathfrak{v}) \\
& + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw + \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw + \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw - \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma A_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\sin nw & & + \Sigma \bar{A}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin nw \\
& + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\sin(nw + 2\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin(nw + 2\mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\sin(nw - 2\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin(nw - 2\mathfrak{v}_1),
\end{aligned}
$$

wo der Coefficient $A^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ zu unterdrücken ist.

Die Relationen, welche wir zur Integration dieses Ausdrucks brauchen, sind die folgenden:

$$242)\ \int \eta^2 \sin nw\, dv = \eta^2 \int \sin nw\, dv - \frac{d\eta^2}{dv} \iint \sin nw\, dv^2 \pm \cdots\cdots$$

$$\int \eta^2 \sin(nw \pm 2\mathrm{v})\, dv = \eta^2 \cos 2\Pi \int \sin(nw \pm 2v)\, dv \mp \eta^2 \sin 2\Pi \int \cos(nw \pm 2v)\, dv$$
$$- \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v)\, dv^2 \pm \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v)\, dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots$$

$$\int \eta\eta' \sin[nw \pm (\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)]\, dv = \eta\eta' \cos(\Pi+\Pi_1) \int \sin(nw \pm 2v)\, dv \mp \eta\eta' \sin(\Pi+\Pi_1) \int \cos(nw \pm 2v)\, dv$$
$$- \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi+\Pi_1)}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v)\, dv^2 \pm \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi+\Pi_1)}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v)\, dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots$$

$$\int \eta\eta' \sin[nw \pm (\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)]\, dv = \eta\eta' \cos(\Pi-\Pi_1) \int \sin nw\, dv \mp \eta\eta' \sin(\Pi-\Pi_1) \int \cos nw\, dv$$
$$- \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi-\Pi_1)}{dv} \iint \sin nw\, dv^2 \pm \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi-\Pi_1)}{dv} \iint \cos nw\, dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots$$

u. s. w.,

von denen die beiden nicht angeführten mit dem Faktor η'^2 den beiden ersten vollständig analog sind und auch die mit den Faktoren $\sin j$ und $\sin j'$ sich leicht herstellen lassen; ausserdem sind die Relationen 222) heranzuziehen. Ich schreibe demnach:

$$243)\quad \begin{aligned} S_2 = {} & \Sigma S_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos nw & & + \Sigma \overline{S}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos nw \\ & + \Sigma S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos(nw + 2\mathrm{v}) & & + \Sigma \overline{S}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw + 2\mathfrak{v}) \\ & + \Sigma S^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos(nw - 2\mathrm{v}) & & + \Sigma \overline{S}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw - 2\mathfrak{v}) \\ & + \text{u. s. w.} \\ & + T_0 S_2\,, \end{aligned}$$

welchen Ausdruck ich nicht ausgeschrieben habe wegen seiner völligen Analogie mit 241). Auch hier ist $S^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$, wie $\overline{S}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ gleich Null.

Man findet:

$$243\text{a})\quad S_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{A_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}, \quad S^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)+2}, \quad S_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{A_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)}$$

$$S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{A^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)+2}, \quad S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}, \quad S^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{A^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)+2}$$

$$S^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{A^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)-2}, \quad S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}, \quad S^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)-2}$$

$$S^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)-2},$$

und ganz analog:

$$\bar{S}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{\bar{A}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Divisoren sind dieselben, wie in R_1, und S_2 wird also grosse Ungleichheiten enthalten bei den charakteristischen Planeten der ersten beiden Klassen, stets aber nur solche der Form C.

2. Für $T_a S_2$ haben wir nach 240) die Gleichung:

$$\text{244)} \qquad \frac{dT_a S_2}{dv} = -A^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta' \sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) - \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv},$$

wo die Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigt sind, und wo wir $\frac{d\,T_a S_2}{dv}$ für $T_a\left(\frac{dS}{dv}\right)$ geschrieben haben, was offenbar hier zulässig ist.

Wenn wir die Gleichung 244) in der vorstehenden Form integriren würden, so würden wir in S Glieder von der Form A vorfinden, welche elementar sind. Gyldén hat aber schon gezeigt, dass $T_a S$ erster Ordnung ist, indem sich die elementaren Glieder in dieser Funktion gegenseitig aufheben. Wir werden uns hier darauf beschränken, diese Thatsache mit bezug auf die Glieder zweiten Grades zu beweisen, da Glieder dritten Grades von der Form A nicht vorkommen und wir die Glieder vierten Grades nicht entwickelt haben. Jedenfalls ist die Gleichung 244) zur Bestimmung von $T_a S$ ungeeignet, und wir wollen sie deswegen transformiren, indem wir das Glied $\frac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}$ durch ein anderes ersetzen.

Wenn wir bezeichnen:

$$\text{245)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \eta\cos\Pi \\ \lambda_2 &= \eta\sin\Pi, \end{aligned}$$

so wird:

$$(\varrho) = \eta\cos\mathrm{v} = \lambda_1\cos v + \lambda_2\sin v,$$

und

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta\sin\mathrm{v} + \frac{d\lambda_1}{dv}\cos v + \frac{d\lambda_2}{dv}\sin v,$$

sowie

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} = -\eta\cos\mathrm{v} - 2\frac{d\lambda_1}{dv}\sin v + 2\frac{d\lambda_2}{dv}\cos v + \frac{d^2\lambda_1}{dv^2}\cos v + \frac{d^2\lambda_2}{dv^2}\sin v.$$

Hieraus folgt mit Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung:

$$\text{246)} \qquad T_a\left\{\left[\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho)\right]\frac{d(\varrho)}{dv}\right\} = \lambda_1\frac{d\lambda_1}{dv} + \lambda_2\frac{d\lambda_2}{dv} = \tfrac{1}{2}\frac{d(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}{dv} = \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Das erste Glied dieser Relation können wir aber aus der Gleichung 184) construiren, und es findet sich:

$$T_a\left\{\left[\frac{d^2(\varrho)}{dv^2}+(\varrho)\right]\frac{d(\varrho)}{dv}\right\} = -Q_0\left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2+2S_1\frac{d(\varrho)}{dv}-P_1\frac{d(\varrho)}{dv},$$

wo ich die Glieder rein zweiter Ordnung, sowie alle, welche nicht von der Form A sind, fortgelassen habe.

Wenn man die Identität

$$S_1\frac{d(\varrho)}{dv} = \frac{d(\varrho)S_1}{dv}-(\varrho)\frac{dS_1}{dv}$$

bedenkt, sowie dass $Q_0\left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2$ keine Glieder der Form A enthält, und dass $T_a\frac{d(\varrho)S_1}{dv}$ rein zweiter Ordnung ist, so findet man:

$$247)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv} = -T_a\left\{2(\varrho)\frac{dS_1}{dv}+P_1\frac{d(\varrho)}{dv}\right\} = T_a\left\{2(\varrho)Q_1-P_1\frac{d(\varrho)}{dv}\right\}.$$

Offenbar wird man für Q_1 und P_1 hier nur die Glieder von der Form B einzusetzen haben, da nur diese im Produkt mit (ϱ) oder $\frac{d(\varrho)}{dv}$ Glieder von der Form A liefern; man hat demnach nach 165) und 179) zu setzen

$$Q_1 = A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\eta'\sin \mathrm{v}_1, \qquad P_1 = B^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\eta'\cos \mathrm{v}_1,$$

und wenn man sich erinnert, dass mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta\sin \mathrm{v},$$

so wird:

$$248)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv} = \left\{\tfrac{1}{2}B^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}-A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\right\}\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Diesen Wert endlich setzen wir in 244) ein und erhalten:

$$249)\qquad \frac{dT_aS_2}{dv} = \left\{A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}B^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}-A^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\right\}\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass das Glied rechter Hand Null ist; wenn wir nämlich die dort auftretenden A- und B-Coefficienten durch die Relationen 166), 180), 135a), 138a) und 122) oder mit Hilfe von Masal's Tafeln und Formeln[1]) durch die γ-Coefficienten ausdrücken, so ist:

$$A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} = -2\gamma_{1.1}, \qquad A^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1} = -5\gamma_{1.1}-4\gamma_{1.2}$$
$$B^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} = 6\gamma_{1.1}+8\gamma_{1.2},$$

---

1) Masal, Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 23 N:o 7.

In dieser Abhandlung sind allerdings die Bezeichnungen nicht die gleichen wie in der vorliegenden.

und es wird

249a) $$T_a S_2 = 0.$$

Indessen hat diese Gleichung nur die Bedeutung, dass $T_a S_2$ erster Ordnung und bei den gewöhnlichen Planeten auch rein erster Ordnung ist; die Glieder rein erster Ordnung der Form A in S_2 können wir aber stets vernachlässigen, nicht nur ihrer ausserordentlichen Kleinheit, sondern auch ihrer Periode wegen.

3. Wir wollen nun die Glieder zweiten Grades im Radiusvektor berechnen. Mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung folgt für ϱ_2 aus Gleichung 184):

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -Q_1 \frac{d(\varrho)}{dv} + 2S_2 - P_2,$$

und wenn wir bezeichnen:

250)
$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = {} & \Sigma b_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos nw & & + \Sigma \bar{b}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos nw \\
& + \Sigma b^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos (nw + 2v) & & + \Sigma \bar{b}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos (nw + 2\mathfrak{v}) \\
& + \Sigma b^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos (nw - 2v) & & + \Sigma \bar{b}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos (nw - 2\mathfrak{v}) \\
& + \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\
& + 2T_a S_2,
\end{aligned}$$

so haben die b-Coefficienten folgende Werte:

250a)
$$\begin{aligned}
b_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2S_{n\cdot 2\cdot 0} - B_{n\cdot 2\cdot 0} + \tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - \tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \\
b^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - B^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - \tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \\
b^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2S^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - B^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} + \tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \\
b^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2S^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \\
b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}, \qquad \text{aber } b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = -B^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1} \\
b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \\
b^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2S^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \\
b_{n\cdot 0\cdot 2} &= 2S_{n\cdot 0\cdot 2} - B_{n\cdot 0\cdot 2} \\
b^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} &= 2S^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} - B^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} \\
b^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} &= 2S^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} - B^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} \\
\bar{b}_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2\bar{S}_{n\cdot 2\cdot 0} - \bar{B}_{n\cdot 2\cdot 0}
\end{aligned}$$

und für die weiteren Coefficienten in gleicher Weise:

$$\bar{b}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'} = 2\bar{S}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'} - \bar{B}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'}$$

Die Integration der Gleichung 250) brauchen wir nicht so eingehend auszuführen, wie wir es für die Glieder nullten und ersten Grades gethan haben;

denn es kommen hier keine Glieder der Form B vor, und wir können im Anschluss an das Vorige die Grössen η, η', Π, Π_1, $\sin j$, $\sin j'$, σ und σ_1 bei der Integration als constant ansehen; wir erhalten so:

$$
251)\quad \begin{aligned}
\varrho_2 = R_2 = {} & R_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos nw & & + \bar{R}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos nw \\
& + R^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos(nw+2v) & & + \bar{R}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw+2\mathfrak{v}) \\
& + R^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos(nw-2v) & & + \bar{R}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw-2\mathfrak{v}) \\
& + \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\
& + T_n R_2,
\end{aligned}
$$

wo:

$$
251\text{a})\quad R_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{b_{n\cdot 2\cdot 0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2},\quad R^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2},\quad R_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{b_{n\cdot 0\cdot 2}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}
$$

$$
R^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{b^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2},\quad R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1-n^2(1-\mu_1)^2},\quad R^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{b^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2}
$$

$$
R^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{b^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2},\quad R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1-n^2(1-\mu_1)^2},\quad R^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{b^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2}
$$

$$
R^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2},
$$

$$
\bar{R}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{\bar{b}_{n\cdot 2\cdot 0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2},
$$

u. s. w., indem die $\bar{R}$-Coefficienten von den $\bar{b}$-Coefficienten genau ebenso abhängen, wie die entsprechenden R-Coefficienten von den b-Coefficienten. Ausserdem hat man zu setzen:

$$
R_{0\cdot 2\cdot 0} = R^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = R^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = R_{0\cdot 0\cdot 2} = \bar{R}_{0\cdot 2\cdot 0} = \bar{R}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = \bar{R}^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = \bar{R}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0.
$$

Von den in den vorstehenden Relationen vorkommenden Divisoren können die folgenden klein werden:

$$
1-n^2(1-\mu_1)^2 \qquad \text{und} \qquad 1-[n(1-\mu_1)-2]^2,
$$

welche wieder zu Gliedern der Form D gehören. Sie sind klein zunächst bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und zwar

Ia. Für die Planeten vom Hekubatypus, wenn $n = 2$ und $n = 6$

Ib. „ „ „ Hildatypus, „ $n = 3$ „ $n = 9$

Ic. „ „ „ Thuletypus, „ $n = 4$ „ $n = 12$,

ferner aber auch für eine neue Klasse von Planeten, welche als charakteristische Planeten der dritten Klasse zu bezeichnen wären, nämlich:

IIIa.	Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{4}$ nähert, und wenn	$n = 4$
IIIb.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{2}{5}$ „ , „ „	$n = 5$
IIIc.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{4}{7}$ „ , „ „	$n = 7$
IIId.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{5}{8}$ „ , „ „	$n = 8$
IIIe.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{7}{10}$ „ , „ „	$n = 10$
IIIf.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{8}{11}$ „ , „ „	$n = 11.$

Die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse finden sich hier nicht wieder, indessen wird auch bei ihnen R_2 beträchtliche Glieder enthalten; diese werden nämlich durch die Funktion S_2 eingeführt, welche rechter Hand in der Differentialgleichung für R_2 vorkommt; sie werden durch die Integration dieser Gleichung nicht vergrössert, da sie von der Form C sind.

Für den Teil von R_2, der von der Form A ist, hat man offenbar:

$$
\text{251b)}\quad \begin{aligned} T_a R_2 = {} & b_{0\cdot2\cdot0}\,\eta^2 + b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) + b_{0\cdot0\cdot2}\,\eta'^2 \\ & + \bar{b}_{0\cdot2\cdot0}\sin^2 j + \bar{b}^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(\sigma-\sigma_1) + \bar{b}_{0\cdot0\cdot2}\sin^2 j' \\ & + 2\,T_a S_2. \end{aligned}
$$

Die Funktion $T_a R_2$ enthält einen constanten Teil; denn es ist:

$$
\text{251c)}\quad \begin{aligned} &\text{p. const. } \eta^2 = \Sigma\varkappa_n^2, && \text{p. const. } \sin^2 j = \Sigma\sin^2\iota_n \\ &\text{p. const. } \eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) = \Sigma\varkappa_n\varkappa_n', && \text{p. const. } \sin j\sin j'\cos(\sigma-\sigma_1) = \Sigma\sin\iota_n\sin\iota_n' \\ &\text{p. const. } \eta'^2 = \Sigma\varkappa_n'^2, && \text{p. const. } \sin^2 j' = \Sigma\sin^2\iota_n'. \end{aligned}
$$

Dieser constante Teil ist zu der Constante b_0 zu schlagen und der Teil der beiden Constanten a_0 und b_0, welcher zweiten Grades ist, kann auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie wir auf pag. 101 unter No. 3 den Teil nullten Grades bestimmt haben, sobald die Funktion W_2 bekannt ist, welche wir gleich herstellen werden; einstweilen haben wir:

$$
\text{251d)}\quad \begin{aligned} \text{p. const. } R_2 = {} & b_{0\cdot2\cdot0}\,\Sigma\varkappa_n^2 + b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\,\Sigma\varkappa_n\varkappa_n' + b_{0\cdot0\cdot2}\,\Sigma\varkappa_n'^2 \\ & + \bar{b}_{0\cdot2\cdot0}\,\Sigma\sin^2\iota_n + \bar{b}^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\,\Sigma\sin\iota_n\sin\iota_n' + \bar{b}_{0\cdot0\cdot2}\,\Sigma\sin\iota_n'^2 \\ & + 2\text{ p. const. } S_2. \end{aligned}
$$

Die Funktion $T_a R_2$ können wir übrigens aus demselben Grunde fortlassen wie $T_a S_2$.

4. Wir wollen nun die Gleichung 185) mit bezug auf die Glieder zweiten Grades integriren; wenn wir nur diese beibehalten und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, so ist:

$$
\text{252)}\quad \begin{aligned} \frac{dW}{dv} = {} & S_2 - R_2 + \{6R_1 - 2S_1\}\eta\cos\mathrm{v} - 3\eta^2 R_0 + \{\tfrac{3}{2}S_0 - 6R_0\}\eta^2\cos 2\mathrm{v} \\ & - \frac{d\Xi_2}{dv}. \end{aligned}
$$

Setzen wir:

$$\text{252a)} \quad \frac{dW}{dv} = \Sigma T_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos nw \qquad + \Sigma \overline{T}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos nw$$

$$+ \Sigma T^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos(nw + 2v) \qquad + \Sigma \overline{T}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw + 2\mathfrak{v})$$

$$+ \Sigma T^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos(nw - 2v) \qquad + \Sigma \overline{T}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw - 2\mathfrak{v})$$

$+$ u. s. w. in völliger Analogie mit 241)

$$+ T_a \frac{dW}{dv} - \frac{d\Xi_2}{dv},$$

so leitet man aus den oben gefundenen Werten von S und R unschwer die folgenden Ausdrücke der T-Coefficienten ab:

$$\text{252b)} \quad T_{n\cdot 2\cdot 0} = S_{n\cdot 2\cdot 0} - 2R_{n\cdot 2\cdot 0} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - 3R_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - 2R^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{3}{4}S_{n\cdot 0\cdot 0} - 3R_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = S^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - 2R^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{3}{4}S_{n\cdot 0\cdot 0} - 3R_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T_{n\cdot 0\cdot 2} = S_{n\cdot 0\cdot 2} - 2R_{n\cdot 0\cdot 2}$$

$$T^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = S^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} - 2R^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}$$

$$T^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = S^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} - 2R^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}$$

$$\overline{T}_{n\cdot 2\cdot 0} = \overline{S}_{n\cdot 2\cdot 0} - 2\overline{R}_{n\cdot 2\cdot 0},$$

und für die weiteren Coefficienten in ganz allgemeiner Weise:

$$\overline{T}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'} = \overline{S}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'} - 2\overline{R}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'}.$$

Dabei sind die Coefficienten

$$T_{0\cdot 2\cdot 0},\quad T^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1},\quad T^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1},\quad T_{0\cdot 0\cdot 2},\quad \overline{T}_{0\cdot 2\cdot 0},\quad \overline{T}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1},\quad \overline{T}^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1},\quad \overline{T}_{0\cdot 0\cdot 2}$$

gleich Null zu setzen, und man hat ausserdem:

$$\text{252c)} \quad T_a \frac{dW}{dv} = T_a S_2 - 2T_a R_2 - S^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\,\eta^2 - S^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\,\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) - 3R_{0\cdot 0\cdot 0}\,\eta^2.$$

Ich setze nun auch W_2 unter die Form:

253) $$W_2 = \Sigma W_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \sin nw \qquad + \Sigma \overline{W}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin j \sin nw$$
$$+ \Sigma W^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \sin(nw+2v) \qquad + \Sigma \overline{W}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \sin(nw+2\mathfrak{v})$$
$$+ \Sigma W^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \sin(nw-2v) \qquad + \Sigma \overline{W}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \sin(nw-2\mathfrak{v})$$
$$+ \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)}$$
$$+ T_a W_2 - \mathfrak{Z}_2.$$

Die Herstellung der Ausdrücke für die W-Coefficienten macht nach dem Vorhergehenden auch keine Schwierigkeiten; man erhält:

253a) $$W_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{T_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}, \quad W^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)+2}, \quad W_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{T_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)},$$
$$W^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{T^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)+2}, \quad W^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}, \quad W^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{T^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)+2},$$
$$W^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{T^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)-2}, \quad W^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}, \quad W^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{T^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)-2},$$
$$W^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)-2},$$
$$\overline{W}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{\overline{T}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)},$$

u. s. w., indem die $\overline{W}$-Coefficienten von den $\overline{T}$-Coefficienten in derselben Weise abhängen, wie die W-Coefficienten von den T-Coefficienten. Die Divisoren sind hier dieselben wie in S_2.

Für die Funktion $\mathfrak{Z}_2$, welche wohl immer vernachlässigt werden kann, hat man nach 60) und 47)

253b) $$\mathfrak{Z}_2 = -\tfrac{3}{8}\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv}\cos 2v - \tfrac{3}{8}\frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv}\sin 2v$$

5. Bei der Bestimmung der Funktion $T_a W_2$ endlich stösst man auf gewisse Schwierigkeiten; wenigstens erfordert eine vollständige Darstellung derselben eine sehr weitgehende Entwicklung. Nach 252c) und 251b) hat man:

254) $$T_a \frac{dW}{dv} = -\{3B_{0\cdot 2\cdot 0} + 2b_{0\cdot 2\cdot 0} + S^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\}\eta^2 - \{2b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} + S^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\}\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) - 2b_{0\cdot 0\cdot 2}\eta'^2$$
$$-2\overline{b}_{0\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j - 2\overline{b}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}\sin j \sin j' \cos(\sigma-\sigma_1) - 2\overline{b}_{0\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'$$
$$-3T_a S_2$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Grösse rein erster Ordnung, und zu ihrer Integration leitet man aus den Relationen 10), 75), und den entsprechenden 154b) und 171a) die folgenden ab:

$$255)\quad \int \eta^2 dv = \frac{2\varkappa\varkappa_1}{\varsigma-\varsigma_1}\sin(\omega-\omega_1)+\frac{2\varkappa\varkappa_2}{\varsigma-\varsigma_2}\sin(\omega-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{2\varkappa_1\varkappa_2}{\varsigma_1-\varsigma_2}\sin(\omega_1-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots$$

$$\int \eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)\,dv = \frac{\varkappa\varkappa'}{\varsigma-\varsigma_1}\sin(\omega-\omega_1)+\frac{\varkappa\varkappa_2'}{\varsigma-\varsigma_2}\sin(\omega-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{\varkappa_1\varkappa_2'+\varkappa_2\varkappa'}{\varsigma_1-\varsigma_2}\sin(\omega_1-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots$$

$$\int \eta'^2 dv = \frac{2\varkappa'\varkappa_2'}{\varsigma_1-\varsigma_2}\sin(\omega_1-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots$$

$$\int \sin^2 j\,dv = -\frac{2\sin\iota\sin\iota_1}{\tau-\tau_1}\sin(\vartheta-\vartheta_1)-\frac{2\sin\iota\sin\iota_2}{\tau-\tau_2}\sin(\vartheta-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\frac{2\sin\iota_1\sin\iota_2}{\tau_1-\tau_2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\cdots\cdots$$

$$\int \sin j\sin j'\cos(\sigma-\sigma_1)\,dv = -\frac{\sin\iota\sin\iota'}{\tau-\tau_1}\sin(\vartheta-\vartheta_1)-\frac{\sin\iota\sin\iota_2'}{\tau-\tau_2}\sin(\vartheta-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\frac{\sin\iota_1\sin\iota_2'+\sin\iota_2\sin\iota'}{\tau_1-\tau_2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\cdots\cdots$$

$$\int \sin^2 j'\,dv = -\frac{2\sin\iota'\sin\iota_2'}{\tau_1-\tau_2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\cdots\cdots$$

In diesen Formeln sind indessen die secularen Teile fortgelassen, da wir sie besonders behandeln wollen. Sie ergeben sich nach den Formeln 251c).

Wenn wir alle elementaren Glieder in W_2 finden wollen, so müssen wir in der Gleichung 254) alle Glieder erster Ordnung berücksichtigen, und folglich in $T_a\left(\frac{dS}{dv}\right)_2$ alle Glieder zweiter Ordnung. Wir müssten also die Gleichung

$$T_a\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = -(1+3S)Q-\tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}-\tfrac{1}{2}S_{0\cdot 0\cdot 0}\frac{d\eta^2}{dv}$$

mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung aufstellen. Diese Operation

hat nun allerdings keine principiellen Schwierigkeiten, jedoch ist die Anzahl dieser Glieder ausserordentlich gross, obwohl sie sich in wenige Argumente vereinigen, und vor Allem müssten dazu auch die Funktionen S_1 und R_1 bis zu den Gliedern zweiter Ordnung einschliesslich berechnet werden, was im Uebrigen nicht erforderlich ist.

Wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, dass diese Glieder der Form A, welche in der Funktion W elementar sind, für unsere Zwecke, d. h. für die praktische Rechnung während eines Zeitraums von etwa 100 Jahren gänzlich belanglos sind, worauf ich noch später (Kapitel VIII) zurückkommen werde; sie sind mit den Gliedern rein erster Ordnung annähernd auf eine Stufe zu stellen.

Eine sehr ausführliche Berechnung dieser Glieder habe ich vor einigen Jahren für den Planeten Hestia ausgeführt, wodurch das eben Gesagte sich bestätigt fand. Man wird demnach nur bei den charakteristischen Planeten nötig haben, die Glieder der Form A zu berücksichtigen; bei denselben tritt der merkwürdige Umstand ein, dass diese Glieder, soweit sie elementar, also nullter Ordnung sind, ebenso belanglos sind, wie bei den gewöhnlichen Planeten, während sich in der Funktion W_2 Glieder erster (aber nicht rein erster) Ordnung vorfinden, die sehr merkliche Beträge erreichen, obwohl sie ursprünglich als Störungen dritter Ordnung auftreten. Das eben Gesagte habe ich für die Planeten vom Hestiatypus bewiesen, während Herr Ludendorff[1]) die sehr mühsame Beweisführung für die Planeten vom Hekubatypus mit dem gewünschten Erfolge durchgeführt hat. Da sich der von Herrn Ludendorff gegebene Beweis auf alle charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und der von mir gegebene auf alle solchen der zweiten Klasse ausdehnen lässt, und ferner bei den charakteristischen Planeten der dritten und höheren Klassen die Glieder der Form A zweiten Grades sämmtlich rein erster Ordnung sind, so ist die Frage betreffs dieser Glieder, soweit sie in den Rahmen des vorliegenden Kapitels fällt, im Allgemeinen als gelöst anzusehen, und ich werde erst im nächsten Kapitel auf dieselbe zurückkommen.

Ich will nun nur noch den secularen Teil der Funktion W mit Berücksichtigung der Glieder zweiten Grades construiren. Derselbe findet sich nach 252c) folgendermaassen:

$$\text{255a)} \qquad \text{p. const.}\left(\frac{dW}{dv}\right)_2 = \text{p. const.}\, S_2 - 2\,\text{p. const.}\, R_2 - \left\{S^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + 3R_{0\cdot0\cdot0}\right\}\Sigma\varkappa_n^2 - S^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\Sigma\varkappa_n\varkappa_n'.$$

Da aber der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$ gleich Null sein soll, so ist die rechte

1) Hans Ludendorff, Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus. Inaugural-Dissertation. Berlin 1897.



Seite dieser Gleichung gleich Null zu setzen und aus ihr in Verbindung mit 251d) die constanten Teile von S_2 und R_2 zu bestimmen.

6. Die Gleichung 186) giebt uns für die Glieder zweiten Grades:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = -Q_1\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}-Z_2.$$

Da mit genügender Annäherung

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j\cos\mathfrak{v},$$

so wird:

$$256)\quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = \begin{aligned}[t] &\Sigma c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\\ +&\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\ +&\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\\ +&\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\ +&\Sigma c^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\ +&\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\\ +&\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\ +&\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

wo

$$256\text{a})\quad \begin{aligned} c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= C^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}, & c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= C^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\\ c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}, & c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\\ c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}, & c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\\ c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= C^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}, & c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= C^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\\ c^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= C^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} \end{aligned}$$

u. s. w. Die weiteren c-Coefficienten sind gleich den entsprechenden C-Coefficienten.

Die Integration der Gleichung 256) erfolgt in derselben Weise wie die der Gleichung 250), indem man η, η', $\sin j$, $\sin j'$, Π, Π_1, σ und σ_1 als constant ansieht. Setzt man

$$257)\quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{Z}_2 = \begin{aligned}[t] &\Sigma Z^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v})\\ +&\Sigma Z^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v})\\ +&\Sigma Z^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v})\\ +&\Sigma Z^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\\ +&\text{u. s. w. in völliger Analogie mit 256)},\end{aligned}$$

so wird offenbar:

257a) $$Z^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0,1\cdot0} = \frac{c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}}{1-[n(1-\mu^1)+2]^2}, \qquad Z^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}$$

$$Z^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}, \qquad Z^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} = \frac{c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2},$$

und überhaupt

$$Z^{(+2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(+2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2}, \qquad Z^{(+1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-n^2(1-\mu_1)^2},$$

$$Z^{(-1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}, \qquad Z^{(-2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(-2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2}.$$

In $\mathfrak{Z}_2$ werden sich merkliche Glieder finden in denselben Fällen, wie in R_2, mit dem einzigen Unterschiede, dass $\mathfrak{Z}_2$ keine beträchtlichen Glieder der Form C enthält.

Nur bei sehr grossen Neigungen wird man einen wesentlichen Teil der Funktion $\mathfrak{Z}_2$ mitzunehmen haben.

§ 5.

Die Glieder höherer Grade.

1. Zum Schlusse dieses Kapitels erübrigt es noch, einige Worte zu sagen über etwaige Rücksichtnahme auf Glieder höheren als zweiten Grades, sowie Gründe dafür beizubringen, warum wir unsere Untersuchungen gerade bei den Gliedern zweiten Grades abgebrochen haben.

Bei den Gliedern nullten Grades ist der Faktor von v in den Argumenten sehr genähert

$$n(1-\mu_2),$$

und die Divisoren in S und W sind

$$n(1-\mu_1),$$

und endlich die Divisoren in R

$$n(1-\mu_1)+1 \quad \text{und} \quad n(1-\mu_1)-1.$$

Bei den Gliedern ersten Grades sind:

die Faktoren von v: $n(1-\mu_2)+1$ und $n(1-\mu_2)-1$
die Divisoren in S und W: $n(1-\mu_1)+1$ und $n(1-\mu_1)-1$
" " in R: $n(1-\mu_1)$, $n(1-\mu_1)+2$, $n(1-\mu_1)-2$.

Bei den Gliedern zweiten Grades sind:

die Faktoren von v: $n(1-\mu_2)$, $n(1-\mu_2)+2$, $n(1-\mu_2)-2$

die Divisoren in S und W: $n(1-\mu_1)$, $n(1-\mu_1)+2$, $n(1-\mu_1)-2$

" " in R: $n(1-\mu_1)+1$, $n(1-\mu_1)-1$, $n(1-\mu_1)+3$, $n(1-\mu_1)-3$.

Diese Reihe ist unschwer fortzusetzen, und man zieht daraus die folgenden Schlüsse:

Die Glieder der Form B sind ersten, dritten u. s. w. Grades, also stets von einem ungeraden Grade; die Glieder der Form A sind zweiten, vierten u. s. w. Grades, also stets von einem geraden Grade, mindestens jedoch vom zweiten; constante und seculare (d. h. von der Form constans mal v) Glieder sind ebenfalls stets von einem geraden Grade, können aber auch nullten Grades sein; und zwar gilt das eben Gesagte für alle Planeten ohne Rücksicht auf den Wert ihrer mittleren Bewegung.

Glieder der Formen C und D kommen nur bei den charakteristischen Planeten vor, und zwar bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse:

die Glieder der Form D bei allen Graden vom nullten an,

" " " " C " " " " ersten an,

bei den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse:

die Glieder der Form D bei allen ungeraden Graden vom ersten an,

" " " " C " " geraden Graden vom zweiten an.

Im allgemeinen lautet das Gesetz folgendermaassen, wenn k die Klassenzahl des Planeten bedeutet:

Ist k eine ungerade Zahl, so kommen Glieder der Form D bei allen geraden Graden vom $(k-1)$ten an, und Glieder der Form C bei allen ungeraden Graden vom k-ten an vor; ausserdem aber finden sich Glieder aller beiden Formen bei jedem Grade vom $(2k-1)$ten an.

Ist k eine gerade Zahl, so kommen Glieder der Form D nur bei allen ungeraden Graden vom $(k-1)$ten an, und Glieder der Form C nur bei allen geraden Graden vom k-ten an vor.

2. Wenn wir von den charakteristischen Planeten der dritten und der höheren Klassen absehen, so zeigt sich in der That bei den Gliedern zweiten Grades ein gewisser Abschnitt, indem die Glieder höheren als zweiten Grades, soweit sie merklich gross sind, keine neuen Argumente aufweisen, die wesentlich verschieden (mit Bezug auf ihre Periode) sind von denen der niederen Grade, so dass man einerseits die Glieder der geraden Grade und andererseits die der ungeraden Grade unter sich als stark genug fallende Reihen ansehen kann.

Die gewöhnlichen Glieder dritten Grades sind in fast allen Fällen sehr klein; und auch die elementaren und charakteristischen Glieder nehmen an Grösse mit ihrem Grade und mit der Klassenzahl des Planeten ab; handelt es sich z. B. um einen Planeten der dritten Klasse, so wird man nur bei ganz besonders starker Annäherung an die strenge Commensurabilität einige wenige Glieder höheren als zweiten Grades berücksichtigen müssen, hauptsächlich solche der Form C. Denn je höher die Klasse ist, der ein charakteristischer Planet angehört, um so mehr muss das Verhältniss der mittleren Bewegungen sich der strengen Commensurabilität nähern, damit die betreffenden Glieder merklich werden. Commensurabilitäten höherer Klassen haben darum keine solche Bedeutung wie die der niederen. (Vgl. Kap. VIII.)

Unter Umständen ist die Mitnahme des einen oder anderen Gliedes dritten Grades noch zu empfehlen, nicht etwa in der Entwicklung der Störungsfunktion, wohl aber in der Differentialgleichung 185) für W, wo Glieder wie die folgenden

$$R_2\,\eta\cos\mathrm{v}, \qquad \eta^2 R_1, \qquad R_1\,\eta^2\cos 2\mathrm{v},$$

einen gewissen noch merklichen Betrag erreichen können.

Ob noch in vereinzelten sonstigen Fällen die Mitnahme einiger Glieder dritten Grades (also auch in der Entwicklung der Störungsfunktion) angebracht ist, hängt im Einzelnen von den Beträgen der Excentricitäts- und Neigungsmoduln ab, und es lassen sich darüber keine einfachen allgemeinen Regeln aufstellen.

Siebentes Kapitel.

Die charakteristischen Planeten.

§ 1.

Die Glieder nullten Grades.

1. Die Gleichungen 183) bis 186) sollen nun integrirt werden für den Fall, dass es sich um einen charakteristischen Planeten handle und dass also in der ersten Annäherung bereits die Störungen zweiter (eventuell auch höherer) Ordnung berücksichtigt werden müssen. Ich werde hierbei auch Gelegenheit nehmen, von den Fällen sogenannter strenger Commensurabilität zu sprechen und zu zeigen, wie die Integrationen für jeden beliebigen Wert der mittleren Bewegung auszuführen sind.

Bei der Herstellung der Glieder nullten Grades handelt es sich nur um die charakteristischen Planeten der ersten Klasse, da die übrigen nach den Formeln des vorigen Kapitels berechnet werden können.

Ich will zunächst die Planeten vom Hecubatypus besprechen, für welche das Verhältnis μ nahe gleich $\frac{1}{2}$ ist. Wie wir oben gesehen haben, ist S_0 rein erster Ordnung; dagegen wird R_0 ein grosses Glied enthalten, das offenbar das Argument $2w$ hat. Ich setze darum den Teil von R_0, welcher nicht rein erster Ordnung ist, unter die Form[1]):

$$\text{258)} \qquad \text{pars}\, R_0 = \beta_1 \cos 2w,$$

wo der Coefficient β_1 vorläufig unbekannt ist. Ich will durchweg die griechischen Buchstaben für alle solchen Coefficienten anwenden, welche zwar erster, aber nicht rein erster Ordnung sind, also kleine Divisoren enthalten.

Die Gleichungen 188), 193) und 205) bestehen auch hier, und zwar giebt uns die letztere für den wesentlichsten Teil von W_0, d. h. für den Teil, der wesentlich grösser ist als die störende Masse:

$$\text{pars}\, \frac{dW}{dv} = -2\beta_1 \cos 2w,$$

oder integrirt:

$$\text{259)} \qquad \text{pars}\, W_0 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1} \sin 2w,$$

woraus

$$\text{259a)} \qquad \text{pars}\, K_0 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1} \sin 2w$$

$$V_0 = 0.$$

2. Wenn man die so gefundenen Teile von R_0 und K_0 in 188) einsetzt, nur die Glieder mit dem Argument $2w$ beibehält, und alle Glieder rein zweiter, sowie die dritter Ordnung bei Seite lässt, so wird:

$$\text{pars}\, \frac{dS}{dv} = -\left\{A_{2\cdot 0\cdot 0} + \left[\tfrac{1}{2} A^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0} - \frac{2\mu}{1-\mu_1} A_{4\cdot 0\cdot 0}\right]\beta_1\right\} \sin 2w.$$

Diesen Ausdruck integriren wir nach der Formel 190) und stellen S_0 wieder durch die Entwicklung 191) dar; dann ist, wenn man bedenkt, dass $V_0 = 0$:

$$\text{260)} \qquad S_{2\cdot 0\cdot 0} = \frac{A_{2\cdot 0\cdot 0}}{2(1-\mu_1)} + \left[\frac{A^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0}}{4(1-\mu_1)} - \frac{\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}}{(1-\mu_1)^2}\right]\beta_1.$$

Wir haben also den Coefficienten $S_{2\cdot 0\cdot 0}$ mit Einschluss der Glieder zweiter Ordnung, jedoch mit Ausschluss derjenigen rein zweiter Ordnung hergestellt. Aller-

---

1) Durch die vorgesetzte Bezeichnung „pars" soll angedeutet werden, dass nur ein Teil der betreffenden Funktion gemeint ist.

dings ist der Coefficient β_1 noch immer unbekannt; wir werden ihn gleich bestimmen.

3. Wenn wir nämlich in der Gleichung 193) die Glieder rein zweiter, sowie die dritter Ordnung fortlassen, so ist:

$$261)\qquad \frac{d^2R}{dv^2}+R = -Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0+2S_0-P_0$$

$$= -\Sigma A_{n\cdot0\cdot0}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0\sin nw+2\Sigma S_{n\cdot0\cdot0}\cos nw$$

$$-\Sigma B_{n\cdot0\cdot0}\cos nw-\Sigma B^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0}R_0\cos nw-\Sigma n\mu B_{n\cdot0\cdot0}K_0\sin nw.$$

Die Differentiation der Relation 258) giebt uns aber mit derselben Genauigkeit:

$$\text{pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -2(1-\mu_1)\beta_1\sin 2w,$$

und wenn wir diesen Wert, sowie die Werte 258), 259a) und 260) in die vorstehende Gleichung substituiren und nur die Glieder mit dem Argument $2w$ beibehalten, so wird:

$$262)\qquad \text{pars}\left\{\frac{d^2R}{dv^2}+R\right\} = b_{2\cdot0\cdot0}\cos 2w,$$

wo

$$262\text{a})\qquad b_{2\cdot0\cdot0} = p_1+p_1'\beta_1$$

und

$$262\text{b})\qquad \begin{aligned} p_1 &= \frac{A_{2\cdot0\cdot0}}{1-\mu_1}-B_{2\cdot0\cdot0}\\ p_1' &= (1-\mu_1)A_{4\cdot0\cdot0}+\frac{A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0}}{2(1-\mu_1)}-\frac{2\mu A_{4\cdot0\cdot0}}{(1-\mu_1)^2}-B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0}-\tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0}+\frac{2\mu B_{4\cdot0\cdot0}}{1-\mu_1}. \end{aligned}$$

Diese beiden letzteren Coefficienten können ohne Weiteres berechnet werden, wenn auch noch nicht streng, da die Constanten α, μ und μ_1 noch nicht genau bekannt sind. Zur Integration der Gleichung 262) erinnert man sich der Relation 197) und ihres Integrals, und man wird schreiben:

$$263)\qquad \begin{aligned} \text{pars}\,R_0 &= g_1\sin v-g_2\cos v\\ \frac{dg_1}{dv} &= \tfrac{1}{2}b_{2\cdot0\cdot0}\cos(2w+v)+\tfrac{1}{2}b_{2\cdot0\cdot0}\cos(2w-v)\\ \frac{dg_1}{dv} &= \tfrac{1}{2}b_{2\cdot0\cdot0}\sin(2w+v)-\tfrac{1}{2}b_{2\cdot0\cdot0}\sin(2w-v). \end{aligned}$$

Ich will nun setzen:

264) $$\mu = \frac{1-\delta}{2}, \qquad \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{2},$$

wonach also die Grössen δ und δ_1 als klein anzusehen sind. Nach den Relationen 210) und indem wir c_0 gleich Null annehmen, besteht zwischen ihnen die wichtige Beziehung:

265) $$\delta_1 = \delta - 2\mu\gamma.$$

Nur bei den kritischen Planeten, d. h. bei denen, deren mittlere Bewegung sich ganz besonders stark einem commensurablen Verhältniss nähert, dürfen wir γ nicht gleich Null annehmen, wie sich gleich zeigen wird. Da unsere Formeln auch für diese Planeten gelten sollen, so behalten wir es bei.

Man hat also:

265a) $$2(1-\mu_1) = 1+\delta_1, \quad 2(1-\mu_1)+1 = 2+\delta_1, \quad 2(1-\mu_1)-1 = \delta_1.$$

Integriren wir die Gleichungen 263) nach den Formeln 201), so wird:

$$g_1 = \tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\sin(2w+v)+\tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\sin(2w-v)$$

$$g_2 = -\tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\cos(2w+v)+\tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\cos(2w-v),$$

woraus man erhält:

266) $$\beta_1 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2+\delta_1}-\frac{1}{\delta_1}\right]b_{2\cdot0\cdot0} = -\frac{b_{2\cdot0\cdot0}}{2\delta_1+\delta_1^2},$$

und mit Rücksicht auf den Ausdruck 262a) für $b_{2\cdot0\cdot0}$ ergiebt sich folgende Gleichung für den Coefficienten β_1

267) $$(2\delta_1+\delta_1^2+p_1')\beta_1 = -p_1,$$

aus welcher β_1 berechnet werden kann, sobald δ_1 genau genug bekannt ist; ist das letztere nicht der Fall, was wohl nur bei den kritischen Planeten vorkommen kann, so wird man sich ein Täfelchen rechnen, das β_1 für verschiedene Werte von δ_1 giebt, und aus dem man später den richtigen Wert interpoliren kann.

4. Im Falle nun, dass δ_1 gleich Null wäre, würde β_1 sehr gross und zwar nullter Ordnung werden, und im Falle der Ausdruck $2\delta_1+\delta_1^2+p_1'$ verschwände, wäre β_1 unendlich. Aus diesem Grunde hat man geschlossen, dass unser Integrationsverfahren für die kritischen Planeten unbrauchbar wäre; Gyldén hat ebenso wie Herr Harzer complicirtere Integrationsmethoden aufgestellt, um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen. Ich habe aber schon in den Astronomischen Nachrichten[1]) gezeigt, dass solche Werte von δ_1 garnicht vor-

1) No. 3346.

kommen können, und dass also eine strenge oder äusserst genäherte Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers überhaupt ausgeschlossen ist. δ_1 ist immer gross im Verhältniss zur störenden Masse. Den Beweis hierfür will ich jetzt im Einzelnen geben und dazu zunächst den Ausdruck der Constanten γ mit Hilfe der Gleichung 205) aufstellen. Diejenigen constanten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, welche rein erster Ordnung sind, haben wir zu c_0 geschlagen und mit dieser Grösse zum Verschwinden gebracht. Es wird also

268) $$\gamma = \tfrac{3}{2}\beta_1^2,$$

wo die Glieder vierter Ordnung sowie die zweiten Grades fortgelassen sind; denn γ enthält nur Glieder gerader Grade und offenbar auch nur solche gerader Ordnungen. Hiermit wird:

269) $$\delta_1 = \delta - 3\mu\beta_1^2.$$

Bisher haben wir zwei Arten von mittleren Bewegungen (n und n_1) eingeführt, die bei allen nicht kritischen Planeten als identisch angesehen werden können; denn es ist:

270) $$\frac{2n'}{n} = 2\mu = 1-\delta$$
$$\frac{2n'}{n_1} = 2\mu_1 = 1-\delta_1.$$

Wir wollen uns die Bedeutung dieser Constanten klar machen. n ist offenbar diejenige Grösse, welche als Integrationsconstante auftritt, so dass δ jeden beliebigen reellen noch so kleinen positiven oder negativen Wert, die Null eingeschlossen, annehmen kann. Ich will darum n die „Bewegungsconstante“ und n_1 die (wahre) „mittlere Bewegung“ nennen; nur die letztere tritt in unseren Divisoren auf.

Man wird aber noch von einer dritten Constante n_2 zu sprechen haben; ich habe nämlich bereits in den Gleichungen 153) und 161a) den secularen Teil von W wie folgt bezeichnet (da $c_0 = 0$):

$$\text{p. sec. } W = \bar{\gamma}v, \qquad \bar{\gamma} = \gamma+\gamma_0,$$

und die Relation

$$\mu_2 = \mu(1+\bar{\gamma})$$

eingeführt. Aus der Gleichung 155) für das Argument w_1:

$$w_1 = (1-\mu)v - B - \mu W + W' + \mathrm{H} - \mathrm{H}'$$

folgt, dass derjenige Teil dieses Argumentes, ebenso wie der des Argumentes w,

der der Länge v proportional, also secular ist, der folgende sein wird

$$\text{p. sec } w = \text{p. sec. } w_1 = (1-\mu-\mu\overline{\gamma})v = (1-\mu_2)v,$$

wo ich die kleinen Grössen c und c' fortgelassen habe.

Setzt man in Analogie mit den Relationen 270) und 264):

$$271)\qquad \frac{n'}{n_2} = \mu_2 \qquad \text{und} \qquad \mu_2 = \frac{1-\delta_2}{2},$$

so gelten die Beziehungen:

$$272)\qquad n_2 = \frac{n}{1+\overline{\gamma}}.$$

$$\delta_2 = \delta - 2\mu\overline{\gamma} = \delta_1 - 2\mu\gamma_0.$$

Ist die Grösse δ_2 äusserst nahe resp. streng gleich Null, so tritt der Fall ein, den man Libration genannt hat, und der sich ebenfalls nach unserer Methode ohne wesentliche Schwierigkeiten behandeln lässt. Aus diesem Grunde will ich n_2 die „mittlere Bewegung in Länge" nennen, da solche Relationen zwischen den mittleren Längen, wie sie sich z. B. bei den Jupitersmonden zeigen, von ihrem Werte abhängen.

Es mag hier wiederholt werden, dass γ_0 mindestens zweiten Grades ist und sowohl positiv wie negativ sein kann; γ ist stets positiv und bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse nullten Grades, bei allen übrigen aber mindestens vom zweiten Grade.

5. Wir wollen jetzt die Gleichungen 267) und 269) betrachten. Wenn wir die Grösse δ_1 sich der Null nähern lassen, so wird nach 267) β_1 unaufhörlich wachsen, dagegen nach 269) sich der Null oder doch einer ausserordentlich kleinen Grösse nähern; man kann hieraus schon schliessen, dass es für β_1 eine obere und für δ_1 eine untere Grenze giebt, die diese Grössen nicht überschreiten können.

Wenn wir den Wert 269) für δ_1 in die Gleichung 267) einsetzen und δ_1^2 gegen δ_1 vernachlässigen, so findet sich die Relation:

$$273)\qquad \beta_1^3 + p\beta_1 + q = 0,$$

wo

$$p = -\frac{2\delta + p_1'}{6\mu} \qquad q = -\frac{p_1}{6\mu}.$$

Aus derselben lässt sich β_1 für jeden beliebigen Wert von δ berechnen, und zwar zeigt ein Blick, dass der Maximalwert von β_1 von der Ordnung der **Kubikwurzel** aus der störenden Masse ist. Die Relation 269) dient zur Berechnung des entsprechenden Wertes von δ_1; der kleinste Wert, den δ_1 annehmen kann, ist von der Ordnung der Kubikwurzel aus dem Quadrat der störenden Masse.

Zur numerischen Lösung der Gleichung 273) hat man die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn

a) $$1+\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}>0$$

ist, so hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel. Durch Einführung der numerischen Werte für p_1 und p_1' habe ich gefunden, dass die Bedingung a) den folgenden Bedingungen gleichbedeutend ist:

a$_1$) $$\delta<+0.0147 \qquad n<607''.2.$$

Dieser Fall entspricht aber allen negativen Werten von δ, dem Werte Null (der strengen Commensurabilität) und allen positiven Werten, welche kleiner als 0.0147 sind, und man hat dementsprechend in diesen Fällen

$$\beta_1 \text{ negativ und } |\beta_1|<0.122$$
$$\delta_1 \text{ negativ und } |\delta_1|>0.0082$$
$$n_1<593''.3.$$

II. Wenn

b) $$1+\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}=0,$$

so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind; die Bedingung b) entspricht den folgenden:

b$_1$) $$\delta=+0.0147 \qquad n=607''.2,$$

und ich fand die entsprechenden Werte

$$\beta_1=-0.122 \text{ und } =+0.061$$
$$\delta_1=-0.0082 \text{ und } =+0.0091$$
$$n_1=593''.3 \text{ und } =603''.8.$$

III. Wenn

c) $$1+\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}<0,$$

so hat die Gleichung drei verschiedene reelle Wurzeln, von denen wir aber zwei verwerfen müssen, da sie zu unbrauchbaren Resultaten führen, wenn δ wächst. Man hat in diesem Fall

c$_1$) $$\delta>+0.0147 \text{ und } n>607''.2,$$

und ferner

$$\beta_1 \text{ positiv und } |\beta_1| < 0.061$$

$$\delta_1 \text{ positiv und } |\delta_1| > 0.0091$$

$$n_1 > 603''.8.$$

Ich gebe im Folgenden eine kleine Tafel wieder, die ich bereits in den Astronomischen Nachrichten mitgeteilt habe, und die die Werte von δ_1, n_1 und β_1 für n und δ als Argument giebt, wie sie aus den Gleichungen 269) und 267) folgen:

Tabelle I.

$\log \delta$	n	$\log \delta_1$	n_1	$\log \beta_1$
8.60_n	575″.4	8.61_n	575″.0	8.32_n
8.40_n	583.6	8.42_n	582.8	8.50_n
8.20_n	588.9	8.28_n	587.2	8.66_n
8.00_n	592.3	8.18_n	589.4	8.76_n
7.00_n	597.7	8.05_n	591.6	8.92_n
$-\infty$	598.3	8.03_n	591.8	8.93_n
7.00	598.9	8.02_n	592.1	8.94_n
8.00	604.2	7.94_n	593.1	9.05_n
8.15	606.8	7.93_n	593.2	9.08_n
8.1670	607.2	7.92_n	593.3	9.09_n
		7.96	603.8	8.79
8.20	607.9	8.10	605.9	8.67
8.40	613.7	8.38	612.9	8.41
8.60	623.1	8.60	623.1	8.19

wo den Logarithmen selbstverständlich -10 anzuhängen ist.

Die Maximalwerte, welche β_1 seinem absoluten Betrage nach annehmen kann, werden also $+0.061$ und -0.122 sein, während δ_1, absolut genommen, nicht unter die Grenzen -0.0082 und $+0.0091$ heruntersinken kann. Die Werte der mittleren Bewegung n_1, welche zwischen 593″.3 und 603″.8 liegen, können nicht vorkommen, und es zeigt sich eine sehr ausgeprägte Lücke im System der kleinen Planeten für das Commensurabilitätsverhältniss $\frac{1}{2}$, eine Thatsache, die durch die Beobachtungen bestätigt wird. n_1 ist eine unstetige Funktion von n, und es darf nicht vergessen werden, dass n_1 nicht unmittelbar mit der elliptischen osculirenden Bewegung verglichen werden kann, und dass wir nur die Glieder nullten Grades in Rücksicht gezogen haben. Aus diesem Grunde kann die von uns gefundene Lücke nicht identisch sein mit derjenigen, welche sich aus den osculirenden Elementen des Berliner Jahrbuchs ergiebt. Wenn wir auf die Glieder höheren Grades Rücksicht nehmen, so erweitert sie sich.

Hat die Constante n genau den der Bedingung b) entsprechenden Wert, also

ungefähr 607″.2, so lässt das Problem zwei Lösungen zu, und der Planet befände sich gewissermassen in einem labilen Zustande.

Hiermit ist bewiesen, dass unsere Integrationsmethode (zunächst mit bezug auf die Glieder nullten Grades) stets zu brauchbaren Resultaten führt, wie nahe auch das Verhältniss der mittleren Bewegungen (oder nach unserer Bezeichnungsweise der Bewegungsconstanten) einem streng commensurablen Verhältniss kommen möge, und die angewandte Methode dürfte wohl die einfachste sein, die man mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Mathematik aufstellen kann.

6. Eines möchte ich noch hinzufügen, nämlich dass es uns hiermit gelungen ist, einen interessanten Specialfall des Dreikörperproblems in aller Strenge zu lösen; nämlich den Fall, in welchem störender und gestörter Körper sich in derselben Ebene bewegen und die Excentricitätsmoduln beider, sowie die Masse des gestörten Körpers gleich Null sind. In diesem Falle beschreibt der störende Körper eine Kreisbahn, der gestörte Körper jedoch eine Bahn, welche (bei Annäherung des Verhältnisses der mittleren Bewegungen an einen commensurablen Bruch) genähert als eine Ellipse mit der eventuell recht beträchtlichen Excentricität β_1 und der starken Apsidenbewegung δ_1 angesehen werden kann. Diese Apsidenbewegung ist retrograd, wenn δ_1 positiv, n also grösser als 607″.2 ist. Nähert sich die Masse des störenden Körpers der Null, so nähert sich die Bahn des gestörten Körpers selbstredend der Kreisbahn.

7. Ich will nun den Begriff der kritischen Planeten strenger definiren, und solche Planeten kritische nennen, für welche die Constante γ numerisch grösser ist als eine Grösse rein erster Ordnung; für sie ist der Coefficient β_1 seiner Grössenordnung nach grösser als die Wurzel aus der störenden Masse, und δ_1 kleiner als dieselbe. Für alle nicht kritischen Planeten kann γ zu c_0 gezogen und annullirt werden, so dass $\mu_1 = \mu$ und $\delta_1 = \delta$ wird. Unter den bis jetzt entdeckten Planeten des Hecubatypus scheint sich kein kritischer zu befinden; dagegen hat es den Anschein, als ob die meisten Planeten des Hildatypus zu diesen zählen, von denen wir nun sprechen werden.

Die Hauptaufgabe bei der Berechnung der kritischen Planeten ist die Bestimmung der Constanten δ_1, welche sich ohne grosse Schwierigkeiten aus osculirenden elliptischen Elementen findet. Auf diese Operation im gegenwärtigen Teile dieser Arbeit einzugehen, würde uns zu weit führen.

8. Wir wollen nun die Planeten vom Hildatypus betrachten, für welche μ nahe gleich $\frac{2}{3}$ ist. Hierbei kann ich mich kurz fassen, da das Verfahren ganz analog dem eben auseinandergesetzten ist. Derjenige Teil von R_0, welcher gross ist im Verhältniss zur störenden Masse, hängt hier offenbar vom Argument $3w$ ab, und ich setze dementsprechend

$$\text{pars } R_0 = \beta_1 \cos 3w, \tag{274}$$

woraus man ableitet

$$\text{pars } K_0 = -\frac{2\beta_1}{3(1-\mu_1)} \sin 3w. \tag{275}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung 188) und wenn man dieselbe integrirt, so wird der vom Argument $3w$ abhängige Coefficient in S_0

$$S_{3\cdot0\cdot0} = \frac{A_{3\cdot0\cdot0}}{3(1-\mu_1)} + \left[\frac{A^{1\cdot0}_{6\cdot0\cdot0}}{6(1-\mu_1)} - \frac{2\mu A_{6\cdot0\cdot0}}{3(1-\mu_1)^2}\right]\beta_1. \tag{276}$$

Wenn man weiter den Ausdruck

$$\text{pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -3(1-\mu_1)\beta_1 \sin 3w$$

berücksichtigt, so hat man aus der Gleichung 193)

$$\text{pars}\left\{\frac{d^2R}{dv^2} + R\right\} = \{p_1 + p_1'\beta_1\} \cos 3w, \tag{277}$$

wo

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2A_{3\cdot0\cdot0}}{3(1-\mu_1)} - B_{3\cdot0\cdot0} \\ p_1' &= \tfrac{3}{2}(1-\mu_1)A_{6\cdot0\cdot0} + \frac{A^{1\cdot0}_{6\cdot0\cdot0}}{3(1-\mu_1)} - \frac{4\mu A_{6\cdot0\cdot0}}{3(1-\mu_1)^2} - B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} - \tfrac{1}{2} B^{1\cdot0}_{6\cdot0\cdot0} + \frac{3\mu B_{6\cdot0\cdot0}}{1-\mu_1}. \end{aligned} \tag{277a}$$

Bezeichnet man:

$$\mu = \frac{2-\delta}{3} \quad \text{und} \quad \mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3}, \tag{278}$$

so besteht zwischen δ und δ_1 die Relation:

$$\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma, \tag{279}$$

und es ist

$$3(1-\mu_1) = 1+\delta_1 \qquad 3(1-\mu_1)+1 = 2+\delta_1 \qquad 3(1-\mu_1)-1 = \delta_1.$$

Für β_1 hat man also die Gleichung:

$$(2\delta_1 + \delta_1^2 + p_1')\beta_1 = -p_1, \tag{280}$$

und für γ wieder:

$$\gamma = \tfrac{3}{2}\beta_1^2, \tag{281}$$

also

$$\delta_1 = \delta - \tfrac{9}{2}\mu\beta_1^2. \tag{282}$$

Wenn wir diesen Wert von δ_1 in 280) einführen, und δ_1^2 fortlassen, so kommt

283)
$$\beta_1^3 + p\beta_1 + q = 0,$$
wo
$$p = -\frac{2\delta + p_1'}{9\mu}, \qquad q = -\frac{p_1}{9\mu},$$

und diese Gleichung discutiren wir wie 273). Mit Berücksichtigung der numerischen Werte von p_1 und p_1' (die ich hier indessen nur genähert berechnet habe) können wieder drei Fälle eintreten:

a)
$$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} > 0.$$

Die Gleichung hat eine reelle Wurzel, und es ist:

$$\delta < +0.0257 \qquad n < 454''.5$$
$$\beta_1 \text{ negativ und } |\beta_1| < 0.124$$
$$\delta_1 \text{ negativ und } |\delta_1| > 0.0217$$
$$n_1 < 443''.8$$

b)
$$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} = 0.$$

Die Gleichung hat drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, und es ist:

$$\delta = +0.0257 \qquad n = 454''.5$$
$$\beta_1 = -0.124 \text{ und } = +0.062$$
$$\delta_1 = -0.0217 \text{ und } = +0.0140$$
$$n_1 = 443''.8 \text{ und } = 451''.9.$$

c)
$$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} < 0.$$

Die Gleichung hat drei verschiedene reelle Wurzeln, von denen zwei zu verwerfen sind, und es ist:

$$\delta > +0.0257 \qquad n > 454''.5$$
$$\beta_1 \text{ positiv und } |\beta_1| < 0.062$$
$$\delta_1 \text{ positiv und } |\delta_1| > 0.0140$$
$$n_1 > 451''.9.$$

Ich gebe wieder eine kleine Tafel, die β_1, δ_1 und n_1 als Funktion von δ resp. n giebt, und die ich auch schon in den Astronomischen Nachrichten veröffentlicht habe:

Tabelle II.

$\log \delta$	n	$\log \delta_1$	n_1	δ_1
8.41_n	443″.0	8.48_n	442″.0	8.75_n
8.00_n	446.5	8.44_n	442.6	8.88_n
7.00_n	448.5	8.40_n	443.1	8.95_n
$-\infty$	448.7	8.40_n	443.1	8.96_n
7.00	448.9	8.38_n	443.4	8.96_n
8.00	451.0	8.34_n	443.8	9.01_n
8.4099	454.5	8.34_n	443.8	9.09_n
		8.15	451.9	8.79
8.45	455.1	8.34	453.7	8.67
8.50	455.9	8.43	454.8	8.60
8 60	457.8	8.57	457.2	8.49

wo den Logarithmen selbstverständlich -10 anzuhängen ist.

Die Lücke umfasst hier die Werte der mittleren Bewegung von 443″.8 bis 451″.9; mit Berücksichtigung der Glieder höherer Grade erweitert auch sie sich.

9. Man kann übrigens schon in der ersten Annäherung die Glieder dritter und selbst vierter Ordnung mitnehmen; die Gleichungen 273) und 283) würden dritten Grades bleiben, und bis zu den Gliedern dritter Ordnung sind unsere Entwicklungen der Funktionen P und Q ausgeführt. Erst wenn man die Glieder fünfter Ordnung, also in γ diejenigen vierter Ordnung berücksichtigt, werden diese Gleichungen fünften Grades; streng lauten sie folgendermaassen:

$$284)\qquad (2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = p_1+p_1'\beta_1+p_1''\beta_1^2+p_1'''\beta_1^3+\cdots\cdots.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bildet eine convergente Reihe, da das Verhältnis $\frac{p_1^{(n)}}{p_1^{(n-1)}}$ die Einheit als Grenze hat, und der Coefficient β_1 wesentlich kleiner als Eins ist. Es fragt sich nur, ob für praktische Zwecke die numerische Convergenz der ersten Glieder stark genug ist, damit man die Reihe mit ihnen abbrechen kann. Für die Planeten vom Hecubatypus ist genähert:

$$\log p_1 = 7.13-10 \qquad \log p_1' = 7.63_n-10,$$

und für diejenigen vom Hildatypus

$$\log p_1 = 7.46-10 \qquad \log p_1' = 8.26_n-10.$$

Die p-Coefficienten nehmen also nicht unbeträchtlich zu, und für die grösseren Werte von β_1 wird man unter Umständen gut thun, die Reihe nicht zu früh abzubrechen. Schwierigkeiten stellen sich der Berechnung der p-Coefficienten nicht in den Weg. Die letzteren werden noch stärker wachsen für die Planeten

vom Thuletypus, für dieselben habe ich die numerischen Rechnungen nicht ausgeführt.

10. Nachdem β_1 bekannt ist, können wir auch die Funktion W_0 berechnen, was genähert schon durch die Formel 259a) geschehen. Indessen müssen in W_0 auch die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, welche nicht rein erster Ordnung sind. Man erhält leicht aus 185), wenn wir als Beispiel die Planeten vom Hecubatypus wählen,

$$\text{pars}\,\frac{dW}{dv} = -2R_0 + 3R_0^2 = \gamma - 2\beta_1 \cos 2w + \tfrac{3}{2}\beta_1^2 \cos 4w.$$

Wenn wir also setzen

$$\text{pars}\, W_0 = \gamma v + \gamma_1 \cos 2w + W_{4\cdot0\cdot0} \cos 4w,$$

so wird:

$$\gamma_1 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1}, \qquad W_{4\cdot0\cdot0} = \frac{3\beta_1^2}{8(1-\mu_1)},$$

und γ ist aus dem Vorigen bekannt.

11. Die Berechnung derjenigen Glieder nullten Grades, welche rein erster Ordnung sind, also der gewöhnlichen Glieder, bietet offenbar nicht die geringsten Schwierigkeiten; sie erfolgt nach den im vorigen Kapitel gegebenen Formeln, und man kann dabei, nachdem β_1 bekannt ist, auch gleich die wichtigeren Glieder zweiter Ordnung mit berücksichtigen, was indessen meist überflüssig sein dürfte.

§ 2.

Die Glieder ersten Grades.

1. Unter den Gliedern ersten Grades finden sich merkliche bei den charakteristischen Planeten der beiden ersten Klassen. Wir wollen zunächst die der ersten Klasse betrachten und als Beispiel wieder diejenigen vom Hecubatypus wählen.

Die Argumente der Glieder ersten Grades sind die folgenden:

$$nw \pm \mathrm{v} \qquad \text{und} \qquad nw \pm \mathrm{v}_1.$$

Der Faktor von v ist also nahe:

$$n(1-\mu) \pm 1,$$

und für μ nahe gleich $\frac{1}{2}$ werden diese Glieder von der Form C sein für $n = 2$, und von der Form D für $n = 4$ (wie bereits im vorigen Kapitel gezeigt wurde). Die ersteren haben also die Argumente:

$$2w - \mathrm{v} \qquad \text{und} \qquad 2w - \mathrm{v}_1,$$

und die letzteren:

$$4w-\mathrm{v} \qquad \text{und} \qquad 4w-\mathrm{v}_1.$$

Wir merken uns die Beziehungen:

$$2(1-\mu_1) = 1+\delta_1 \qquad 2(1-\mu_1)-1 = \delta_1 \qquad 4(1-\mu_1)-1 = 1+2\delta_1.$$

Die Funktion S_1 wird zwei merkliche Glieder der Form C enthalten, die wir, wie folgt, ansetzen können:

285) $$\text{pars } S_1 = \alpha_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+\alpha_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1).$$

In der Funktion R_1 werden sich diese Glieder ebenfalls vorfinden, da S auf der rechten Seite der Gleichung 184) steht, diese rechte Seite also nicht rein erster Ordnung ist; ausserdem enthält R_1 die Glieder von der Form D. Wir schreiben demnach:

286) $$\begin{aligned}\text{pars } R = \beta_1\cos 2w+\beta_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+\beta_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)\\ +\beta_4\eta\cos(4w-\mathrm{v})+\beta_5\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

wo ich auch des Glied nullten Grades, das aus dem Vorigen bekannt ist, wieder hingeschrieben habe.

Die Gleichung 184) giebt mit Vernachlässigung aller Glieder zweiter und rein erster Ordnung:

$$T_0\left\{\frac{d^2R}{dv^2}+R\right\}_1 = 2T_0S_1 = 2\alpha_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+2\alpha_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1).$$

Da aber hier offenbar $\frac{d^2R}{dv^2}$ rein erster Ordnung (oder vielmehr noch kleiner) ist, so wird:

$$T_0R_1 = 2T_0S_1,$$

und wir haben die Beziehungen:

287) $$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\beta_2, \qquad \alpha_3 = \tfrac{1}{2}\beta_3,$$

welche also mit Vernachlässigung der Glieder zweiter und der rein erster Ordnung gelten.

Mit derselben Genauigkeit wird aber 185):

$$\begin{aligned}\text{pars}\frac{dW}{dv} &= -2R_0+S_1-2R_1+6R_0\eta\cos\mathrm{v}\\ &= -2\beta_1\cos 2w+(\alpha_2-2\beta_2+3\beta_1)\eta\cos(2w-\mathrm{v})+(\alpha_3-2\beta_3)\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)\\ &\qquad -2\beta_4\eta\cos(4w-\mathrm{v}) \qquad -2\beta_5\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1)\\ &\qquad +3\beta_1\eta\cos(2w+\mathrm{v}).\end{aligned}$$

Wir berücksichtigen nun, dass wir (Kapitel V.) W so zerlegen wollen, dass die gewöhnlichen Glieder, sowie die der Form D zu K und die der Form C zu V kommen; ich setze dementsprechend:

288) $$\text{pars}(K_0+K_1) = \gamma_1 \sin 2w + \gamma_4 \eta \sin(4w-\text{v}) + \gamma_5 \eta' \sin(4w-\text{v}_1) + \gamma_6 \eta \sin(2w+\text{v})$$

289) $$\text{pars}\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 = \gamma_2 \eta \cos(2w-\text{v}) + \gamma_3 \eta' \cos(2w-\text{v}_1).$$

Es wird dann offenbar, wenn wir die Integration über die Glieder der Form D ausführen:

$$\gamma_1 = -\frac{2\beta_1}{1+\delta_1}, \qquad \gamma_4 = -\frac{2\beta_4}{1+2\delta_1}, \qquad \gamma_5 = -\frac{2\beta_5}{1+2\delta_1}, \qquad \gamma_6 = \frac{3\beta_1}{2+\delta_1},$$

oder mit ausreichender Genauigkeit:

290) $$\gamma_1 = -2\beta_1, \qquad \gamma_4 = -2\beta_4, \qquad \gamma_5 = -2\beta_5, \qquad \gamma_6 = \tfrac{3}{2}\beta_1,$$

und mit Rücksicht auf 287)

290a) $$\gamma_2 = -\tfrac{3}{2}\beta_2 + 3\beta_1, \qquad \gamma_3 = -\tfrac{3}{2}\beta_3.$$

2. Wir haben jetzt die α- und die γ-Coefficienten, also den wesentlichsten Teil der Funktionen S und W ausgedrückt durch die in R vorkommenden β-Coefficienten, und wir können nun zur Integration der Gleichungen 183) und der folgenden übergehen. Mit Fortlassung der Glieder zweiten Grades und derjenigen dritter sowie der rein zweiter Ordnung können wir die Gleichung 183) wie folgt schreiben:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_0 - Q_1 - 3S_1 Q_0,$$

und mittels der Entwicklung der Funktion Q haben wir:

291) $$\begin{aligned}\frac{dS}{dv} = & -\Sigma A_{n\cdot0\cdot0} \sin nw - \Sigma A^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0} R_1 \sin nw + \Sigma n\mu A_{n\cdot0\cdot0} K_1 \cos nw - 3\Sigma A_{n\cdot0\cdot0} S_1 \sin nw \\ & -\Sigma A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} \eta \sin(nw+\text{v}) - \Sigma A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R_0 \eta \sin(nw+\text{v}) + \Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} K_0 \cos(nw+\text{v}) \\ & -\Sigma A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} \eta \sin(nw-\text{v}) - \Sigma A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R_0 \eta \sin(nw-\text{v}) + \Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} K_0 \cos(nw-\text{v}) \\ & -\Sigma A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} \eta' \sin(nw+\text{v}_1) - \Sigma A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R_0 \eta' \sin(nw+\text{v}_1) + \Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} K_0 \cos(nw+\text{v}_1) \\ & -\Sigma A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} \eta' \sin(nw-\text{v}_1) - \Sigma A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R_0 \eta' \sin(nw-\text{v}_1) + \Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} K_0 \cos(nw-\text{v}_1).\end{aligned}$$

Wir integriren diese Gleichung und behalten im Integrale nur die Glieder mit Argumenten einer der charakteristischen Formen:

$$2w-\text{v}, \qquad 2w-\text{v}_1, \qquad 4w-\text{v}, \qquad 4w-\text{v}_1,$$

oder der elementaren Formen

$$\mathrm{v} \quad \text{und} \quad \mathrm{v}_1$$

bei.

Ich habe in der Gleichung 291) die Glieder nullten Grades beibehalten, soweit sie erster Ordnung sind, da durch ihre Integration Glieder ersten Grades entstehen; es ist nämlich nach 190)

$$A_{n\cdot 0\cdot 0}\left(\int \sin nw\, dv\right)_1 = \frac{\mu A_{n\cdot 0\cdot 0}}{1-\mu_1}\int\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \sin nw\, dv,$$

und diesen Wert müssen wir für das erste Glied rechter Hand der Gleichung 291) einsetzen; und zwar erhält man mit Rücksicht auf 289) und 290a):

$$\begin{aligned}\text{pars}\,\Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0}\int \sin nw\, dv = {} & \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}(2\beta_1-\beta_2)\int \eta \sin \mathrm{v}\, dv - \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_3\int \eta' \sin \mathrm{v}_1\, dv \\ & + \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}(2\beta_1-\beta_2)\int \eta \sin(4w-\mathrm{v})\, dv - \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_3\int \eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1)\, dv.\end{aligned}$$

Ferner findet man mit Hilfe der Werte von R_1, K_1 und S_1:

$$\begin{aligned}\text{pars}\,\Sigma A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \sin nw = {} & \left\{\tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2 + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_4\right\}\eta \sin \mathrm{v} + \left\{\tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_3 + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_5\right\}\eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & - \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_4\,\eta \sin(2w-\mathrm{v}) - \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_5\,\eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1) \\ & + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\,\eta \sin(4w-\mathrm{v}) + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_3\,\eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{pars}\,\Sigma n\mu A_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \cos nw = {} & \left\{4\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_4 + \tfrac{3}{2}\mu A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_1\right\}\eta \sin \mathrm{v} + 4\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_5\,\eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & - \left\{2\mu A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_4 + 3\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_1\right\}\eta \sin(2w-\mathrm{v}) - 2\mu A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_5\,\eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1) \\ & - \tfrac{9}{2}\mu A_{6\cdot 0\cdot 0}\beta_1\,\eta \sin(4w-\mathrm{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{pars}\,\Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0} S_1 \sin nw = {} & \tfrac{1}{4}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\,\eta \sin \mathrm{v} + \tfrac{1}{4}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_3\,\eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & + \tfrac{1}{4}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\,\eta \sin(4w-\mathrm{v}) + \tfrac{1}{4}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_3\,\eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Weiter haben wir unter den Gliedern erster Ordnung in 291) die folgenden zu berücksichtigen:

$$A^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\eta' \sin \mathrm{v}_1, \qquad A^{(-1)}_{2\cdot 1\cdot 0}\eta \sin(2w-\mathrm{v}), \qquad A^{(-1)}_{2\cdot 0\cdot 1}\eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1),$$
$$A^{(-1)}_{4\cdot 1\cdot 0}\eta \sin(4w-\mathrm{v}), \qquad A^{(-1)}_{4\cdot 0\cdot 1}\eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1).$$

Endlich geben die mit R_0 multiplicirten Glieder den folgenden Teil:

$$\begin{aligned}& -\left\{\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 1\cdot 0} - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 1\cdot 0}\right\}\beta_1\,\eta \sin \mathrm{v} - \left\{\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 1} - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 1}\right\}\beta_1\,\eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{4\cdot 1\cdot 0}\beta_1\,\eta \sin(2w-\mathrm{v}) + \left\{\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 1}\right\}\beta_1\,\eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1) \\ & - \left\{\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{6\cdot 1\cdot 0}\right\}\beta_1\,\eta \sin(4w-\mathrm{v}) - \left\{\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 1} + \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{6\cdot 0\cdot 1}\right\}\beta_1\,\eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

und die mit K_0 multiplicirten den folgenden:

$$+\{2\mu A^{(+1)}_{2\cdot1\cdot0}-2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\}\beta_1\eta\sin \mathrm{v}+\{2\mu A^{(+1)}_{2\cdot0\cdot1}-2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\}\beta_1\eta'\sin \mathrm{v}_1$$

$$+4\mu A^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\beta_1\eta\sin(2w-\mathrm{v})+4\mu A^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\beta_1\eta'\sin(2w-\mathrm{v}_1)$$

$$-\{2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}-6\mu A^{(-1)}_{6\cdot1\cdot0}\}\beta_1\eta\sin(4w-\mathrm{v})-\{2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}-6\mu A^{(-1)}_{6\cdot0\cdot1}\}\beta_1\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1).$$

Wenn wir alle diese Werte einsetzen in 291), so findet sich:

292)
$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dv} = &-a^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\eta\sin \mathrm{v} - a^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\eta'\sin \mathrm{v}_1\\ &-a^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\eta\sin(2w-\mathrm{v})-a^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\eta'\sin(2w-\mathrm{v}_1)\\ &-a^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\eta\sin(4w-\mathrm{v})-a^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

wo

292a)
$$\begin{aligned}a^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} &= q^{(1)}_1\beta_1+q^{(2)}_1\beta_2+q^{(3)}_1\beta_4\\ a^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} &= A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}+q^{(1)}_2\beta_1+q^{(2)}_1\beta_3+q^{(3)}_1\beta_5\\ a^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0} &= A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}+q^{(1)}_3\beta_1+q^{(2)}_3\beta_4\\ a^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1} &= A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}+q^{(1)}_4\beta_1+q^{(\ )}_3\beta_5\\ a^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} &= A^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}+q^{(1)}_5\beta_1+q^{(2)}_1\beta_2\\ a^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} &= A^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}+q^{(1)}_6\beta_1+q^{(2)}_1\beta_3,\end{aligned}$$

und wo

292b)
$$\begin{aligned}q^{(1)}_1 &= \tfrac{3}{2}\mu A_{2\cdot0\cdot0}+\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}-2\mu A^{(+1)}_{2\cdot1\cdot0}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\\ q^{(2)}_1 &= \tfrac{3}{4}(1-2\mu)A_{2\cdot0\cdot0}+\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0}\\ q^{(3)}_1 &= \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0}-4\mu A_{4\cdot0\cdot0}\\ q^{(1)}_2 &= \tfrac{1}{2}A^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}-2\mu A^{(+1)}_{2\cdot0\cdot1}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\\ q^{(1)}_3 &= \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0}+3\mu A_{4\cdot0\cdot0}-4\mu A^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\\ q^{(2)}_3 &= -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0}+2\mu A_{2\cdot0\cdot0}\\ q^{(1)}_4 &= -\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1}-4\mu A^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\\ q^{(1)}_5 &= \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot1\cdot0}+3\mu A_{2\cdot0\cdot0}+\tfrac{9}{2}\mu A_{6\cdot0\cdot0}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}-6\mu A^{(-1)}_{6\cdot1\cdot0}\\ q^{(1)}_6 &= \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot0\cdot1}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}-6\mu A^{(-1)}_{6\cdot0\cdot1}.\end{aligned}$$

Die A- sowie die q-Coefficienten können berechnet werden und auch β_1 ist aus dem Vorigen bekannt. Ich habe in den vorstehenden Formeln für μ_1 den Bruch $\frac{1}{2}$ gesetzt, da dadurch nur Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Wenn man auch $\mu = \frac{1}{2}$ setzt, so würde der Coefficient $A_{2\cdot0\cdot0}$ im Ausdruck von $q^{(2)}_1$ verschwinden. Die Coefficienten β_2, β_3, β_4 und β_5 sind noch unbekannt.

Ich will zunächst denjenigen Teil von S_1 bestimmen, welcher von der Form C ist, also in erster Linie die Coefficienten α_2 und α_3. Es ist

$$T_c S_1 = -a^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\int\eta\sin(2w-v)\,dv - a^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\int\eta'\sin(2w-v_1)\,dv,$$

und die Integrale haben wir nach 214) auszuführen und dabei zu setzen

$$\int\sin(2w-v)\,dv = -\frac{1}{\delta_1}\cos(2w-v)$$

$$\iint\sin(2w-v)\,dv^2 = -\frac{1}{\delta_1^2}\sin(2w-v)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot$$

Wir behalten des kleinen Divisors δ_1 wegen in 214) die beiden ersten Zeilen bei und erhalten:

$$T_c S_1 = \frac{a^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}}{\delta_1}\left\{\eta\cos(2w-v) - \frac{1}{\delta_1}\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\sin(2w-v) - \frac{1}{\delta_1}\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\cos(2w-v)\right\}$$
$$+\frac{a^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}}{\delta_1}\left\{\eta'\cos(2w-v_1) - \frac{1}{\delta_1}\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\sin(2w-v) - \frac{1}{\delta_1}\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\cos(2w-v)\right\}.$$

Für $T_c S_1$ ist also die Gleichung anzusetzen:

$$\begin{aligned} T_c S_1 &= \alpha_2\,\eta\cos(2w-v) + \alpha_3\,\eta'\cos(2w-v_1) \\ &\quad - \frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv} + \alpha_3\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\sin(2w-v) \\ &\quad - \frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv} + \alpha_3\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\cos(2w-v), \end{aligned} \tag{293}$$

welche strenger ist als 285); α_2 und α_3 bestimmen sich aus den Relationen:

$$\begin{aligned} \delta_1\alpha_2 &= A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0} + q_3^{(1)}\beta_1 + q_3^{(2)}\beta_4 \\ \delta_1\alpha_3 &= A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1} + q_4^{(1)}\beta_1 + q_3^{(2)}\beta_5, \end{aligned} \tag{293a}$$

wo β_1 bekannt, aber β_4 und β_5 zunächst unbekannt sind.

Bei der Integration der übrigen Teile von S_1 brauchen wir in 214) nur die ersten Zeilen beizubehalten, da durch die Integration keine kleinen Divisoren entstehen, und es wird:

$$\begin{aligned} T_b S_1 &= a^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\,\eta\cos v + a^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos v_1 \\ T_d S_1 &= \frac{a^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}}{1+2\delta_1}\,\eta\cos(4w-v) + \frac{a^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}}{1+2\delta_1}\,\eta'\cos(4w-v_1). \end{aligned} \tag{294}$$

3. Wenn wir in der Gleichung 184) alle Glieder zweiten Grades, alle solchen dritter Ordnung und alle solchen rein zweiter Ordnung fortlassen,

dagegen die Glieder nullten Grades mitnehmen, soweit sie erster Ordnung sind, so kommt:

$$295)\quad \frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = 2S_0-P_0-Q_0\frac{d(\varrho)}{dv}-Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_1-Q_1\left(\frac{dR}{dv}\right)_0+2S_1+2S_0S_1-P_1-2S_1P_0.$$

In diese Gleichung setzen wir für die dort fungirenden Ausdrücke S_0, Q_0 u. s. w. die früher gefundenen Entwicklungen ein, wobei ich nur an die folgenden:

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta\sin\mathrm{v}$$

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -(1+\delta_1)\beta_1\sin 2w$$

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 = -(1+2\delta_1)\beta_4\eta\sin(4w-\mathrm{v})-(1+2\delta_1)\beta_5\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1),$$

sowie an die Ausdrücke 293) und 294) für S_1 erinnere. So ergiebt sich:

$$296)\quad \begin{aligned}\frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = {} & b_{2\cdot0.0}\cos 2w \\ & +b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\eta\cos\mathrm{v}+b^{(+1)}_{0.0\cdot1}\eta'\cos\mathrm{v}_1 \\ & +\left\{2\alpha_2+b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\right\}\eta\cos(2w-\mathrm{v})+\left\{2\alpha_3+b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\right\}\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1) \\ & +b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\eta\cos(4w-\mathrm{v})+b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1) \\ & -\frac{2}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\sin(2w-v) \\ & -\frac{2}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\cos(2w-v),\end{aligned}$$

wo $b_{2\cdot0\cdot0}$ aus dem § 1 bekannt ist und wo:

$$296a)\quad \begin{aligned} b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} &= p_1^{(0)}+p_1^{(1)}\beta_1+p_1^{(2)}\beta_2+p_1^{(3)}\beta_4 \\ b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} &= p_2^{(0)}+p_2^{(1)}\beta_1+p_1^{(2)}\beta_3+p_1^{(3)}\beta_5 \\ b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0} &= p_3^{(0)}+p_3^{(1)}\beta_1+p_3^{(2)}\beta_2+p_3^{(3)}\beta_4 \\ b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1} &= p_4^{(0)}+p_4^{(1)}\beta_1+p_3^{(2)}\beta_3+p_3^{(3)}\beta_5 \\ b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} &= p_5^{(0)}+p_5^{(1)}\beta_1+p_5^{(2)}\beta_2+p_5^{(3)}\beta_4 \\ b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} &= p_6^{(0)}+p_6^{(1)}\beta_1+p_5^{(2)}\beta_3+p_5^{(3)}\beta_5.\end{aligned}$$

Die p-Coefficienten können berechnet werden, da sie nur von den A- und B-Coefficienten abhängen; sie sind sämmtlich rein erster Ordnung. Ihre Ausdrücke will ich hier nicht ableiten, da uns dies zu weit in die Details führen

18*

würde und da sie überdies in der pag. 117 citirten Dissertation des Herrn Ludendorff sich vorfinden, auf welche ich überhaupt betreffs verschiedener Einzelheiten verweise.

Die Gleichung 296) integriren wir nach 197) bis 199), zu denen man noch den Ausdruck 220a) ziehen kann; ausserdem ermitteln wir den aus dem Gliede nullten Grades entstehenden Teil nach der Formel 201).

Wenn wir demnach setzen

297) $$\operatorname{pars} \varrho_1 = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

so wird:

298) $$\left.\begin{matrix}\dfrac{dg_1}{dv}\\ \dfrac{dg_2}{dv}\end{matrix}\right\} = \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \substack{\cos\\ \sin}(2w+v) \pm \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \substack{\cos\\ \sin}(2w-v)$$
$$+\tfrac{1}{2}b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\left\{\eta \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}+v) \pm \eta \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}-v)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\left\{\eta' \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}_1+v) \pm \eta' \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}_1-v)\right\}$$
$$+\left\{\alpha_2+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\right\}\left\{\eta \substack{\cos\\ \sin}(2w-\mathrm{v}+v) \pm \eta \substack{\cos\\ \sin}(2w-\mathrm{v}-v)\right\}$$
$$+\left\{\alpha_3+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\right\}\left\{\eta' \substack{\cos\\ \sin}(2w-\mathrm{v}_1+v) \pm \eta' \substack{\cos\\ \sin}(2w-\mathrm{v}_1-v)\right\}$$
$$-\frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\left\{\pm\substack{\sin\\ \cos}2w+\substack{\sin\\ \cos}(2w-2v)\right\}$$
$$-\frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\left\{\substack{\cos\\ \sin}2w\pm\substack{\cos\\ \sin}(2w-2v)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\left\{\eta \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}+v) \pm \eta \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}-v)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\left\{\eta' \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}_1+v) \pm \eta' \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}_1-v)\right\}.$$

In den beiden ersten Gliedern setzt man nach 289):

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \substack{\cos\\ \sin}(2w+v) = \frac{\gamma_2}{2}\left\{\eta \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}+v)+\eta \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}+v)\right\}$$
$$+\frac{\gamma_3}{2}\left\{\eta' \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}_1+v)+\eta' \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}_1+v)\right\}$$
$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \substack{\cos\\ \sin}(2w-v) = \frac{\gamma_2}{2}\left\{\eta \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}-v)+\eta \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}-v)\right\}$$
$$+\frac{\gamma_3}{2}\left\{\eta' \substack{\cos\\ \sin}(\mathrm{v}_1-v)+\eta' \substack{\cos\\ \sin}(4w-\mathrm{v}_1-v)\right\},$$

und dann integrirt man den Ausdruck nach 221) und 222); indessen führen wir die Integration derjenigen Glieder nicht aus, in denen das Argument w nicht auftritt; und bei Ausführung der Integrationen $\int \eta \cos(4w - \mathrm{v} - v)\,dv$ und $\int \eta' \cos(4w - \mathrm{v}_1 - v)\,dv$ nach 221) müssen wir die Glieder mitberücksichtigen, welche die Differentialquotienten $\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}$, $\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}$ u. s. w. enthalten.

Dann wird:

$$
\begin{aligned}
99)\ \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = {} & \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_2\right\}\int \eta \,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,(\mathrm{v}+v)\,dv \pm \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2\right\}\int \eta \,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,(\mathrm{v}-v)\,dv \\
& + \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_3\right\}\int \eta' \,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,(\mathrm{v}_1+v)\,dv \pm \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_3\right\}\int \eta' \,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,(\mathrm{v}_1-v)\,dv \\
& + \left\{\alpha_2 + \tfrac{1}{2} b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\right\}\left\{\pm \frac{1}{1+\delta_1}\eta \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(2w-\mathrm{v}+v) - \frac{1}{1-\delta_1}\eta \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(2w-\mathrm{v}-v)\right\} \\
& + \left\{\alpha_3 + \tfrac{1}{2} b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\right\}\left\{\pm \frac{1}{1+\delta_1}\eta' \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(2w-\mathrm{v}_1+v) - \frac{1}{1-\delta_1}\eta' \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(2w-\mathrm{v}_1-v)\right\} \\
& + \frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2 \frac{d\eta\cos\Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\left\{\frac{1}{1+\delta_1}\,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,2w \mp \frac{1}{1-\delta_1}\,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,(2w-2v)\right\} \\
& + \frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2 \frac{d\eta\sin\Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\left\{\mp \frac{1}{1+\delta_1}\,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,2w + \frac{1}{1-\delta_1}\,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(2w-2v)\right\} \\
& + \frac{1}{4(1+\delta)}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_2\right\}\left\{\pm \eta \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(4w-\mathrm{v}+v) + \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,4w \mp \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,4w\right\} \\
& + \frac{1}{4\delta_1}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2\right\}\left\{+ \eta \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(4w-\mathrm{v}-v) \pm \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,(4w-2v) - \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(4w-2v)\right\} \\
& + \frac{1}{4(1+\delta_1)}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_3\right\}\left\{\pm \eta' \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(4w-\mathrm{v}_1+v) + \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,4w \mp \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,4w\right\} \\
& + \frac{1}{4\delta_1}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_3\right\}\left\{+ \eta' \,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(4w-\mathrm{v}_1-v) \pm \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\,{\textstyle\substack{\cos \\ \sin}}\,(4w-2v) - \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\,{\textstyle\substack{\sin \\ \cos}}\,(4w-2v)\right\}.
\end{aligned}
$$

Die in den beiden ersten Zeilen stehenden Glieder führen in ϱ zu Gliedern der Form B; wir wollen zunächst R_1 bestimmen und sie deshalb einstweilen bei Seite lassen.

Wenn wir jetzt mit Hilfe der Ausdrücke 299) und 297) R_1 bilden und uns zugleich erinnern, dass wir es in der Form 286) darstellen wollen, so wird offenbar der Ansatz für diese Funktion in ihrer vollständigen Form, wie folgt, zu machen sein:

$$300)\quad R_1 = \beta_2\eta\cos(2w-v)+\beta_3\eta'\cos(2w-v_1)$$
$$+\beta_4\eta\cos(4w-v)+\beta_5\eta'\cos(4w-v_1)$$
$$-\frac{2}{\delta_1(1-\delta_1^2)}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\sin(2w-v)$$
$$-\frac{2}{\delta_1(1-\delta_1^2)}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\cos(2w-v)$$
$$-\frac{1}{2\delta_1}\left\{\beta_4\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}+\beta_5\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\sin(4w-v)$$
$$-\frac{1}{2\delta_1}\left\{\beta_4\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}+\beta_5\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\cos(4w-v),$$

und für die β-Coefficienten gelten die Gleichungen:

$$300a)\quad \beta_2 = \frac{2\alpha_2+b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}}{1-\delta_1^2},\qquad \beta_3 = \frac{2\alpha_3+b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}}{1-\delta_1^2},$$
$$\beta_4 = -\frac{b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}}{4\delta_1(1+\delta_1)}-\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)},\quad \beta_5 = -\frac{b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}}{4\delta_1(1+\delta_1)}-\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}.$$

Die Grösse δ_1 kann hier mehrfach vernachlässigt werden, z. B. in den Faktoren $(1-\delta_1^2)$, $(1+\delta_1)$ u. s. w. Wir haben nun die nötigen Gleichungen abgeleitet zur Berechnung der α- und der β-Coefficienten; es bleibt nur noch übrig, sie arithmetisch zu lösen. Ich stelle dazu die Gleichungen 293a) und 300a) zusammen in der folgenden Form, indem ich zugleich auf die Relationen 296a) Rücksicht nehme:

$$301)\quad \begin{aligned}
\delta_1\alpha_2 &= A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}+q_3^{(1)}\beta_1+q_3^{(2)}\beta_4\\
\delta_1\alpha_3 &= A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}+q_4^{(1)}\beta_1+q_3^{(2)}\beta_5\\
(1-\delta_1^2)\beta_2 &= 2\alpha_2+p_3^{(0)}+p_3^{(1)}\beta_1+p_3^{(2)}\beta_2+p_3^{(3)}\beta_4\\
(1-\delta_1^2)\beta_3 &= 2\alpha_3+p_4^{(0)}+p_4^{(1)}\beta_1+p_3^{(2)}\beta_3+p_3^{(3)}\beta_5\\
4\delta_1(1+\delta_1)\beta_4 &= -p_5^{(0)}-p_5^{(1)}\beta_1-p_5^{(2)}\beta_2-p_5^{(3)}\beta_4-\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2}{\delta_1(2+\delta_1)}\\
4\delta_1(1+\delta_1)\beta_5 &= -p_6^{(0)}-p_6^{(1)}\beta_1-p_5^{(2)}\beta_3-p_5^{(3)}\beta_5-\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3}{\delta_1(2+\delta_1)}.
\end{aligned}$$

Man könnte in den letzten beiden Gleichungen die Coefficienten γ_2 und γ_3 durch ihre Ausdrücke 290a) ersetzen. Indessen wollen wir darauf Rücksicht nehmen, dass die beiden Glieder, welche diese Coefficienten enthalten, sehr gross sind und bei den kritischen Planeten im Allgemeinen sogar grösser sind als die vorhergehenden. Deshalb wollen wir uns einen strengeren Ausdruck für dieselben beschaffen, was mit Hilfe der Gleichung 185) nicht schwer ist. Ich

habe in § 1 gezeigt, dass der Coefficient β_1 im Maximum von der Grössenordnung der Kubikwurzel aus der störenden Masse ist; ob dies nun auch von den übrigen Coefficienten der charakteristischen Glieder gilt, lässt sich nicht ohne Weiteres sagen; nimmt man es an, so könnte man die dritten Potenzen aller dieser Coefficienten mit der störenden Masse vergleichen und zugleich mit den Gliedern rein erster Ordnung vernachlässigen. Wir wollen demnach aus 185) γ_2 und γ_3 bestimmen mit Fortlassung aller Glieder dritter und aller rein erster Ordnung, aber mit Berücksichtigung der Quadrate der β-Coefficienten. Die letzteren entstehen aus dem Gliede $3R^2$, denn es ist:

$$\text{pars}\, 3R^2 = 3\beta_1\beta_4\eta\cos(2w-\text{v}) + 3\beta_1\beta_5\eta'\cos(2w-\text{v}_1).$$

Danach wird also:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -\tfrac{3}{2}\beta_2 + 3\beta_1 + 3\beta_1\beta_4 \\ \gamma_3 &= -\tfrac{3}{2}\beta_3 + 3\beta_1\beta_5. \end{aligned} \tag{302}$$

Wenn wir nun zwischen den ersten vier der Gleichungen 301) die beiden Coefficienten α_2 und α_3 eliminiren und in die beiden letzten die eben für γ_2 und γ_3 gefundenen Werte einsetzen, sowie berücksichtigen, dass β_1 bekannt ist, so erhalten wir vier Gleichungen von der folgenden Form:

$$\begin{aligned} a_1\beta_2 &= a_2 + a_3\beta_4 \\ b_1\beta_4 &= b_2 + b_3\beta_2 \\ a_1'\beta_3 &= a_2' + a_3'\beta_5 \\ b_1'\beta_5 &= b_2' + b_3'\beta_3. \end{aligned} \tag{303}$$

In denselben sind nur die vier β-Coefficienten unbekannt. Die Bezeichnungen a_1, b_1 u. s. w. für die numerisch bekannten Faktoren will ich hier nur ganz vorübergehend gebrauchen; es ist zu bemerken, dass einige von ihnen von der Grösse ϑ_1 abhängen, also nicht endgiltig berechnet werden können, ehe dieselbe bekannt ist. Es wird sich darum empfehlen, auch hier, wie bei β_1 eine kleine Tafel zu berechnen, die die β-Coefficienten für verschiedene Werte von ϑ_1 giebt. Aus derselben wird man später nicht nur die richtigen Werte der β entnehmen können, sondern man wird auch eine Uebersicht haben, wie dieselben sich mit ϑ_1 ändern, also ihren Verlauf ähnlich studiren können, wie wir es mit β_1 mit Hilfe der Tafel auf pag. 128 gethan haben.

Sobald die β gefunden sind, lassen sich auch α_2 und α_3 nach 300a) sowie die γ berechnen; die letzteren zunächst wenigstens genähert.

4. Es bleibt nun noch die Funktion (ϱ) zu bestimmen und hierzu müssen wir auf die Gleichung 299) zurückgreifen. Wir haben:

$$(\varrho) = g_1\sin v - g_2\cos v,$$



wenn wir in g_1 und g_2 nur diejenigen Glieder aufnehmen, welche zu Gliedern der Form B führen.

Ich bezeichne der Kürze wegen in 299):

$$
304)\quad \begin{aligned}
b_1 &= b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2 \qquad & b_3 &= b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_2 \\
b_2 &= b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_3 \qquad & b_4 &= b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_3\,,
\end{aligned}
$$

und diese Coefficienten sind bekannt. Wir haben dann zu setzen:

$$
g_1 = \frac{b_1}{2}\int \eta\cos\Pi\,dv + \frac{b_2}{2}\int \eta'\cos\Pi_1\,dv + \frac{b_3}{2}\int \eta\cos(2v-\Pi)\,dv + \frac{b_4}{2}\int \eta'\cos(2v-\Pi_1)\,dv
$$

$$
g_2 = \frac{b_1}{2}\int \eta\sin\Pi\,dv + \frac{b_2}{2}\int \eta'\sin\Pi_1\,dv + \frac{b_3}{2}\int \eta\sin(2v-\Pi)\,dv + \frac{b_4}{2}\int \eta'\sin(2v-\Pi_1)\,dv.
$$

Der Integration dieser Ausdrücke stellen sich keine Schwierigkeiten entgegen, wenn man die Relationen 10) und 154b), sowie die daraus folgenden:

$$
\eta\,{\cos \atop \sin}(2v-\Pi) = \varkappa\,{\cos \atop \sin}(2v-\omega) + \sum \varkappa_n\,{\cos \atop \sin}(2v-\omega_n)
$$

$$
\eta'\,{\cos \atop \sin}(2v-\Pi_1) = \sum \varkappa'_n\,{\cos \atop \sin}(2v-\omega_n)
$$

bedenkt. Es ist:

$$
\int \eta\,{\cos \atop \sin}\Pi\,dv = \pm\frac{\varkappa}{\varsigma}\,{\sin \atop \cos}\,\omega \pm \sum \frac{\varkappa_n}{\varsigma_n}\,{\sin \atop \cos}\,\omega_n
$$

$$
\int \eta\,{\cos \atop \sin}(2v-\Pi)\,dv = \pm\frac{\varkappa}{2-\varsigma}\,{\sin \atop \cos}(2v-\omega) \pm \sum \frac{\varkappa_n}{2-\varsigma_n}\,{\sin \atop \cos}(2v-\omega_n)
$$

. . . . ,

und hiernach erhalten wir für (ϱ) den Ausdruck:

$$
305)\quad (\varrho) = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{b_1}{\varsigma} + \frac{b_3}{2-\varsigma}\right]\cos(v-\omega) + \sum\left\{\frac{\varkappa_n}{2}\left[\frac{b_1}{\varsigma_n} + \frac{b_3}{2-\varsigma_n}\right] + \frac{\varkappa'_n}{2}\left[\frac{b_2}{\varsigma_n} + \frac{b_4}{2-\varsigma_n}\right]\right\}\cos(v-\omega_n),
$$

und da derselbe mit dem folgenden identisch sein soll:

$$
(\varrho) = \varkappa\cos(v-\omega) + \sum \varkappa_n\cos(v-\omega_n),
$$

so erhält man zur Bestimmung von ς die folgende Gleichung:

$$
305\text{a})\quad 2\varsigma = b_1 + \frac{\varsigma b_3}{2-\varsigma},
$$

und zur Bestimmung der $\varkappa_n$ die folgenden:

$$\left[2\varsigma_n - b_1 - \frac{\varsigma_n b_3}{2-\varsigma_n}\right]\varkappa_n = \left[b_2 + \frac{\varsigma_n b_4}{2-\varsigma_n}\right]\varkappa_n'. \tag{305b}$$

Man kann indessen wohl stets mit ausreichender Genauigkeit setzen:

$$\varsigma = \frac{b_1}{2}$$

$$\varkappa_n = \frac{b_2 \varkappa_n'}{2(\varsigma_n - \varsigma)}.$$

Nichts hindert übrigens, die Gleichungen 305a) und 305b) numerisch so streng zu lösen, wie man will.

5. Zuletzt ist die Funktion W_1 resp. ihre Teile K_1 und V_1 zu bestimmen, denn durch die Werte der γ, die wir im Vorigen abgeleitet haben, ist sie nur genähert bekannt.

Ich will indessen darauf hier nicht näher eingehen, da die Operationen den Vorigen ganz analog sind und da Herr Ludendorff in seiner genannten Dissertation die betreffenden Entwicklungen giebt. Man hat erstens alle Glieder mitzunehmen, welche bereits auf der rechten Seite der Gleichung 185) einen merklichen Betrag haben, und zweitens die der Form C, da die letzteren durch die Integration der genannten Gleichung vergrössert werden. Der grösste Teil von W_1 wird offenbar der folgende sein:

$$\text{pars}\, W_1 = \text{pars}\, V_1 = \frac{\gamma_7}{\delta_1}\eta \sin(2w - \mathrm{v}) + \frac{\gamma_8}{\delta_1}\eta' \sin(2w - \mathrm{v}_1). \tag{306}$$

6. Nachdem die charakteristischen und die elementaren Glieder bestimmt sind, lassen sich die gewöhnlichen Glieder ohne Weiteres nach den Formeln des vorigen Kapitels berechnen, und zwar wenn man will, gleich mit Berücksichtigung derjenigen Glieder zweiter Ordnung, welche nicht rein zweiter Ordnung sind.

7. Auch die Bestimmung der Funktion $\mathfrak{z}$ kann ich übergehen; der charakteristische Teil derselben stellt sich in der Form

$$\text{pars}\, \mathfrak{Z}_1 = \zeta_4 \sin j \sin(4w - \mathfrak{v}) + \zeta_5 \sin j' \sin(4w - \mathfrak{v}_1) \tag{307}$$

dar; denn $\mathfrak{z}$ enthält keine merklichen Glieder der Form C und überhaupt keine Glieder nullten Grades; allerdings sind noch die Glieder hinzuzufügen, welche die Differentialquotienten $\frac{d \sin j \cos\sigma}{dv}$, $\frac{d \sin j \sin\sigma}{dv}$ u. s. w. enthalten.





8. Die Planeten vom Hilda- und Thuletypus werden sich in derselben Weise behandeln lassen, wie die vom Hecubatypus und ich brauche auf sie hier nicht einzugehen. Ueber den Planeten Hilda habe ich einige Rechnungen angestellt; die Zunahme der A- und der B-Coefficienten mit der Ordnung der Glieder ist hier schon merklich stark, und sie wird bei denen vom Thuletypus noch erheblich stärker sein; es scheint, dass bei diesen Planeten die Lücken in den Werten von n_1 bei 450″ und bei 400″ sehr gross sind, sobald die Excentricitätsmoduln einigermaassen merkliche Werte haben, so dass δ_1 hier beträchtlich grösser bliebe als beim Hecubatypus. Dagegen scheint es, als ob die osculirende elliptische mittlere Bewegung sich sehr der strengen Commensurabilität nähern, vielleicht sogar durch sie hindurchgehen kann.

9. Es bliebe nun noch von den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse zu sprechen. Für diejenigen vom Hestiatypus (μ nahe gleich $\frac{1}{3}$) habe ich die nötigen Ableitungen in meiner pag. 7 citirten Abhandlung gegeben; die Bezeichnungen sind dort von den oben gebrauchten allerdings etwas verschieden. Die Glieder der Form D haben hier die Argumente

$$3w - \mathrm{v} \qquad \text{und} \qquad 3w - \mathrm{v}_1,$$

und Glieder der Form C kommen unter denen ersten Grades nicht vor, wodurch die Entwicklungen erheblich einfacher werden, als bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse. Da die Funktion V nur Glieder der Formen A oder C enthält, so ist also hier $V_1 = 0$. Ferner sind S_1, R_0 und W_0 rein erster Ordnung. Man würde also den Ansatz für den wichtigsten Teil der Funktion R_1, wie folgt, zu machen haben

$$\text{pars}\, R_1 = \beta_1 \eta \cos(3w - \mathrm{v}) + \beta_2 \eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1), \tag{308}$$

und für die Funktionen W_1 und K_1

$$\text{pars}\, W_1 = \text{pars}\, K_1 = \gamma_1 \eta \sin(3w - \mathrm{v}) + \gamma_2 \eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1). \tag{308a}$$

Für die Coefficienten γ_1 und γ_2 hat man:

$$\gamma_1 = -2\beta_1 \qquad \gamma_2 = -2\beta_2. \tag{308b}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke ist man im Stande, die rechten Seiten der Gleichungen 183) bis 185) mit Berücksichtigung der wichtigen Glieder zweiter Ordnung zu ermitteln, indem man ähnlich verfährt wie oben. Die Coefficienten β_1 und β_2 bleiben zunächst unbekannt, bestimmen sich aber sehr bald durch sehr einfache Gleichungen. Auch auf diese Planeten brauche ich hier nicht des Näheren einzugehen, da unsere am vorigen Beispiel gezeigte Integrationsmethode allgemein giltig ist.



§ 3.

Die Glieder zweiten Grades.

1. Bei der Integration der Glieder zweiten Grades haben wir zu bemerken, dass hier die Glieder der Form A zum ersten Mal auftreten. Wir werden dieselben jedoch, gerade wie bei den gewöhnlichen Planeten, von den übrigen Gliedern trennen und gesondert berechnen. Es lassen sich dann die charakteristischen wie die gewöhnlichen Glieder nach ganz denselben Methoden herstellen, die ich im Vorigen angewandt habe; es werden selbstverständlich die Entwicklungen hier umfangreicher. Für die Planeten der ersten Klasse verweise ich zunächst auf die pag. 117 citirte Abhandlung des Herrn Ludendorff, und für die der zweiten Klasse auf die pag. 7 citirte schwedische von mir.

Nur über die Glieder der Form A will ich einige Bemerkungen machen; diese Glieder sind bei den charakteristischen Planeten wesentlich grösser als bei den gewöhnlichen und können hier nicht immer vernachlässigt werden. Die Methode zu ihrer Ermittlung ist dieselbe wie im vorigen Kapitel. Es ist zunächst die Gleichung 183) mit alleiniger Berücksichtigung dieser Glieder aufzustellen:

$$309)\qquad T_0\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = -T_0\{Q_2 + 3S_0\,Q_2 + 3S_2\,Q_0 + 3S_1\,Q_1\} - \frac{1+S_{0.0.0}}{2}\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Schon bei der Besprechung der gewöhnlichen Planeten ist gezeigt worden, dass die Glieder erster Ordnung auf der rechten Seite dieser Gleichung sich aufheben. Wir müssen auch hier $\frac{d\eta^2}{dv}$ ersetzen durch einen Ausdruck, der auf dieselbe Weise herzuleiten ist, wie 247); nur wird man bei den charakteristischen Planeten Glieder mitzunehmen haben, welche dort vernachlässigt worden sind.

Wenn man in W_2 alle elementaren Glieder erhalten will, so muss man in $\frac{dS}{dv}$ alle Glieder rein zweiter Ordnung der Form A berücksichtigen, wie schon oben bemerkt wurde. Die Zahl derselben ist aber auch hier unendlich und ihre Berechnung bis zu einer gewissen Genauigkeitsgrenze ist äusserst umständlich, wenn sich ihr auch keine principiellen Schwierigkeiten in den Weg stellen. Nun aber sind diese Glieder der Form A, welche in $\frac{dW}{dv}$ rein erster Ordnung sind, in W auch bei den charakteristischen Planeten so klein, dass man sie gänzlich fortlassen kann. Das Hauptaugenmerk bei Aufstellung der Gleichung 309) hat man also auf diejenigen Glieder zu richten, welche zweiter (und höherer) Ordnung, aber rein nur erster Ordnung sind.

Ich will mit m eine Grösse bezeichnen, welche ihrem Betrage nach direkt mit der störenden Masse zu vergleichen ist. Ausserdem will ich mit k eine Grösse bezeichnen, die mit den Coefficienten β resp. γ an Grösse verglichen werden kann, die also erster Ordnung ist, aber den kleinen Divisor δ_1 enthält. Es



werden demnach die Glieder von den Ordnungen mk und mk^2 sein, die man bei der Aufstellung der Gleichung 309) zu berücksichtigen hat. Da also die rechte Seite dieser Gleichung Glieder der Ordnung mk enthält, so könnte man daraus schliessen, dass die Funktion S Glieder der Ordnung k enthielte, die dann in W und V von der Ordnung $\frac{k}{m} = \frac{1}{\delta_1}$ würden.

2. Ich habe bei Gelegenheit der Berechnung des Planeten Hestia sehr eingehende Untersuchungen über diese Glieder gemacht und gefunden, dass sich bei den Planeten vom Hestiatypus die Glieder von der Ordnung mk im Ausdruck von $\frac{dT_a S_2}{dv}$ in ähnlicher Weise gegenseitig aufheben, wie die Glieder erster Ordnung, so dass die rechte Seite der Gleichung 309) in der That nur von der Grössenordnung mk^2 ist, wenn ich absehe von den Gliedern rein zweiter Ordnung, die unerheblich sind, wie oben bemerkt. Für die Planeten vom Hestiatypus gilt die Relation

$$309a)\qquad T_a\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = 2\beta_1\beta_2\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)}{dv},$$

die ich hier ohne Beweis anführe, und wo β_1 und β_2 die durch die Gleichung 308) definirten Coefficienten sind. Der vorige Ausdruck kann im Allgemeinen nicht ohne Weiteres integrirt werden, da $\left(\frac{dS}{dv}\right)_2$ nicht gleich $\frac{dS_2}{dv}$ ist wegen des Vorkommens der Funktion V in den Argumenten. Man hat streng genommen

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = \left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2 + \left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2 + \left(\frac{dS_2}{dv}\right)_2.$$

Für die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse ist aber die Funktion V zweiten Grades und infolgedessen $\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2$ gleich Null und $\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2$ enthält keine Glieder der Form A, so dass also:

$$\frac{d\,T_a S_2}{dv} = T_a\left(\frac{dS}{dv}\right)_2,$$

und

$$310)\qquad T_a S_2 = 2\beta_1\beta_2\,\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1).$$

Weiter habe ich für $T_a R_2$ den Ausdruck hergeleitet:

$$310a)\qquad T_a R_2 = \beta_1^2\eta^2 + 6\beta_1\beta_2\,\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) + \beta_2^2\eta'^2,$$

wo, übereinstimmend mit dem Vorigen, die Glieder rein erster Ordnung fortge-

lassen sind. Endlich folgt:

310b) $$\frac{d\,T_a W_2}{dv} = T_2\left(\frac{dW}{dv}\right)_2 = \tfrac{3}{8}\beta_1^2\eta^2 - 3\beta_1\beta_2\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) + \tfrac{3}{8}\beta_2^2\eta'^2.$$

Die Integration dieses Ausdrucks geschieht nach den Formeln 255); der numerische Betrag von $T_a W_2$ kann hiernach immerhin ein recht beträchtlicher sein; die Rechnung für Hestia hat gezeigt, dass er die grössten überhaupt vorkommenden Störungsglieder enthält; da sie indessen von sehr langer Periode sind, so sind sie von geringerer Bedeutung, was sich am besten übersehen lässt, wenn man sie in secularer Form darstellt (vgl. Kapitel VIII und pag. 85).

3. Für die Planeten vom Hecubatypus ist Herr Ludendorff (vgl. pag. 117) zu sehr interessanten Resultaten gelangt, die mit den eben besprochenen in Uebereinstimmung sind. Bei diesen Planeten treten auf der rechten Seite der Gleichung 309) ebenfalls Glieder der Ordnungen mk, mk^2 u. s. w. auf; es ist aber hier nicht, wie oben $\frac{d\,T_a S_2}{dv} = T_a\left(\frac{dS}{dv}\right)_2$ zu setzen. Vielmehr hat man

$$\frac{d\,T_a S_2}{dv} = T_a\frac{dS_2}{dv} = T_a\left\{\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 - \left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2 - \left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2\right\}.$$

$\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2$ enthält auch hier keine Glieder der Form A, aber $\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2$ enthält solche und zwar von der Ordnung k^2. Demnach würde die Funktion $T_a S_2$ Glieder der Ordnungen $\frac{k^2}{m}$, $\frac{k^3}{m}$, $\frac{k^5}{m^2}$, k, k^2 u. s. w. enthalten. Herr Ludendorff hat nun bewiesen, dass sich die Glieder der Ordnungen $\frac{k^2}{m}$ und k gänzlich, sowie die der Ordnungen $\frac{k^3}{m}$ und $\frac{k^5}{m^2}$ mit gewissen Modifikationen gegenseitig aufheben. Es steht darum zu vermuten, dass auch bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse die Funktion S von der Ordnung k^2 ist, wenn auch der Beweis hierfür noch nicht in aller Vollständigkeit gegeben ist.

Die grössten Glieder der Form A, welche in W_2 auftreten können, hat Herr Ludendorff in seiner Abhandlung pag. 34 gegeben; dieselben können eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, da δ_1, das eigentlich an Stelle von δ in den Ausdrücken Herrn Ludendorffs stehen muss, nicht beliebig klein werden kann.

§ 4.

Die Glieder höheren als zweiten Grades und allgemeine Bemerkungen über die charakteristischen Planeten.

1. Bei den gewöhnlichen Planeten war gezeigt worden, dass die Mitnahme des einen oder des anderen Gliedes dritten Grades nur in Ausnahmefällen ge-



boten ist. Handelt es sich jedoch um charakteristische Planeten, so kann die Mitnahme solcher Glieder ernstlich in Frage kommen und namentlich bei den kritischen Planeten ist sie geboten, wenn man Resultate von ausreichender Genauigkeit erhalten will. Es handelt sich dabei nicht um die Glieder höheren als zweiten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion, d. h. in den Ausdrücken für Q, P und Z, welche wir oben vernachlässigt haben; denn die A-, B- und C-Coefficienten, welche dort vorkommen, sind sämmtlich rein erster Ordnung. Die Glieder in diesen Ausdrücken fallen bei den charakteristischen Planeten durchaus in ähnlicher Weise wie bei den gewöhnlichen und zwar nach den Potenzen der Excentricitäts- und Neigungsmoduln.

Die Formeln 190), 201) u. s. w. zeigen aber, dass bei Integration eines Gliedes n-ten Grades auch Glieder von höherem als n-ten Grade entstehen, da die Funktion V in den Argumenten vorkommt, worauf wir oben schon Rücksicht genommen haben. Es wird sich zeigen, dass bei den kritischen Planeten solche Glieder höheren Grades mitzunehmen sind, welche aus den mit $\frac{dV}{dv}$ multiplicirten Gliedern in den genannten Formeln entstehen.

Nehmen wir z. B. die Formel 190), welche bei Integration der Glieder nullten Grades in S und W anzuwenden ist:

$$\int {\sin \atop \cos} nw\,dv = \mp \frac{1}{n(1-\mu_1)} {\cos \atop \sin} nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{dV}{dv} {\sin \atop \cos} nw\,dv.$$

Die aus dem zweiten Glied rechter Hand entstehenden Glieder will ich nach Gyldén's Vorgang „exargumentale Glieder" nennen; man erhält sie, indem man für $\frac{dV}{dv}$ seinen Wert einsetzt; da die Funktion V bei uns nur langperiodische Glieder der Formen A und C enthält, so erzeugt ihr Produkt mit gewöhnlichen Gliedern nur wieder gewöhnliche Glieder; und diese erzeugen ihrerseits bei ihrer Integration wieder neue exargumentale Glieder, so dass man eine Reihe erhält, welche einmal nach positiven Potenzen von $\frac{dV}{dv}$ und ausserdem nach negativen Potenzen des zu dem Gliede gehörigen Divisors fortschreitet. Wir wollen uns dieses Verhältniss klar machen, indem wir annehmen, die Integration

$$\int {\sin \atop \cos} (\lambda_n v - nV)\,dv \tag{311}$$

sei auszuführen. Die Reihe der exargumentalen Glieder schreitet dann fort nach positiven Potenzen von $n\frac{dV}{dv}$ und nach negativen von λ_n (oder wenigstens von Grössen, die sich von λ_n nur um Grössen der Ordnung δ_1 unterscheiden). Auch die Faktoren von v in den exargumentalen Gliedern können sich von λ_n nur um Grössen dieser Ordnung unterscheiden. Ist also das Glied 311) ein ge-

wöhnliches, so sind die zugehörigen exargumentalen Glieder auch gewöhnliche, und die Reihe schreitet nach Potenzen von $\frac{dV}{dv}$ fort, fällt also in derselben Weise, wie die nach Potenzen von R oder S fortschreitenden Reihen; da aber V mindestens ersten Grades ist, so fallen diese exargumentalen Glieder auch noch nach den Potenzen der Excentricitätsmoduln; man wird übereinstimmend mit dem Vorigen auch hier die Glieder dritten Grades vernachlässigen.

Ist das Glied 311) ein elementares, so ist der Faktor n von V stets gleich Null; es treten dann überhaupt keine exargumentalen Glieder auf; darum ist auch z. B. stets

$$\frac{d\,T_a S_n}{dv} = \left(\frac{d\,T_a S}{dv}\right)_n.$$

Wir müssen aber den Fall besonders beachten, in dem das Glied 311) von der Form C also charakteristisch ist, denn um ihn dreht sich in erster Linie die Frage nach der Brauchbarkeit unserer Methode. Die Reihe der exargumentalen Glieder schreitet hier nach Potenzen der Grösse $\frac{1}{\delta_1}\frac{dV}{dv}$ fort und es fragt sich, ob δ_1 klein genug werden kann, um diese Reihe zur Divergenz zu bringen. Ich habe bereits in den Astronomischen Nachrichten No. 3346 gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, will aber hier diese Frage etwas specialisiren und mich zunächst wieder an die Planeten vom Hecubatypus halten. Wir hatten oben die Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_c = \gamma_2\eta\cos(2w-\mathrm{v}) + \gamma_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)$$

abgeleitet und die Coefficienten γ_2 und γ_3 von der Ordnung k d. h. $\frac{m}{\delta_1}$ gefunden. Wir nehmen zunächst an, dass δ_1 nicht sehr klein ist, so werden die besprochenen Reihen, welche nach Potenzen von Grössen der Ordnung $\frac{m}{\delta_1^2}\varkappa_n$ fortschreiten, offenbar stark genug fallen. Lassen wir δ_1 aber abnehmen bis zu einem Wert von der Ordnung

$$\sqrt{m},$$

so wird die Reihe weniger stark fallen, für diesen Wert von δ_1 aber immer noch ebenso stark, wie eine Reihe, welche nach den Potenzen der $\varkappa_n$ fortschreitet, also im Wesentlichen ebenso wie die Entwicklung der Störungsfunktion. In diesem Falle bietet die Integration keine Schwierigkeiten und man wird die Glieder dritten Grades im Allgemeinen fortlassen.

2. Anders stellt sich die Sache, wenn δ_1 kleiner wird als eine Grösse von der Ordnung $\sqrt{m}$; dann fällt die Reihe schwächer, und man ist gezwungen, die

exargumentalen (und nur diese) Glieder höheren als zweiten Grades mitzunehmen, so weit wie es ihre numerischen Beträge erfordern. Die Planeten, welche unter die letztere Klasse fallen, sind es, welche ich kritische nenne. Es ist noch die Frage, ob es überhaupt solche in unserem Sonnensysteme giebt; vielleicht gehören Hilda und Ismene zu ihnen. Indessen kann δ_1 niemals so klein werden, dass unser Verfahren unbrauchbar wird, was ich jetzt zeigen will.

Dieser Beweis ist in ganz analoger Weise zu führen, wie ich ihn für die Glieder nullten Grades bereits gegeben habe. Greifen wir zurück zur Gleichung 262), indem wir uns dort sämmtliche Glieder der höheren Ordnungen hingeschrieben denken, soweit sie nicht rein zweiter Ordnung sind:

$$\text{pars}\left(\frac{d^2 R}{dv^2}+R\right)_0 = (p_1+p_1'\beta_1+p_1''\beta_1^2+\cdots\cdots)\cos 2w.$$

Die Convergenz der Reihe rechter Hand wurde pag. 132 bewiesen. Integriren wir die vorige Gleichung, so wird der Teil des Integrals, welcher nullten Grades ist,

$$\text{pars } R_0 = \beta_1 \cos 2w.$$

Ausserdem treten aber exargumentale Glieder auf, welche von den Formen D und B sind; die der Form B führen wir zu (ϱ) hinüber, so dass der betreffende Teil von R durch eine Reihe der Form

$$\text{312)} \qquad \text{pars} R = \sum_1^\infty \frac{a_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} \varkappa^{n-1} \cos[(1-\delta_n)v + D_n]$$

sich darstellt, wo die a_n Coefficienten bedeuten, welche von der Ordnung Eins sind, wenn sie sich auch von der Einheit numerisch erheblich unterscheiden können. Streng genommen fallen sie nach Potenzen des Verhältnisses $\alpha = \frac{a}{a'}$; diese Abnahme ist jedoch vollkommen illusorisch, da sehr grosse Zahlenfaktoren hinzutreten. $\varkappa$ soll eine Grösse von der Ordnung der Excentricitätsmoduln bezeichnen, und die δ_n sind Grössen von der Ordnung δ_1 resp. δ_2.

Wenn wir nun in ähnlicher Weise die charakteristischen Glieder ersten Grades in der Gleichung 184), also den Ausdruck $\left(\frac{d^2 R}{dv^2}+R\right)_1$ integriren, so erhalten wir den hieraus entspringenden Teil von R in der Form:

$$\text{312a)} \qquad \text{pars} R = \sum_1^\infty \frac{a_n' m^n}{\delta_1^{2n-1}} \varkappa^n \cos[(1-\delta_n')v + D_n'],$$

wo ich a_n' und δ_n' schreibe, da diese Grössen mit den in 312) figurirenden nicht identisch sind; indessen sind sie von derselben Ordnung.

Wenn wir ebenso mit den Gliedern zweiten und höheren Grades verfahren, so erhalten wir ähnliche Gleichungen und wenn man dieselben alle zusammenfasst, so stellt sich der Teil von R, welcher r-ten Grades ist, durch die Reihe

313) $$R_r = \sum_{n=1}^{n=r+1} \frac{a_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} x^r \cos[(1-\delta_n) v - D_n]$$

dar, welche Gleichung mit der allgemeineren Gleichung 21) in den Astronomischen Nachrichten 3346 verglichen werden kann. Da wir hier nur von den kritischen Planeten handeln wollen, also δ_1 seiner Grössenordnung nach kleiner als $\sqrt{m}$ annehmen wollen, so werden die Glieder der Reihe 313) *anwachsen*; da die Reihe aber *endlich* ist, so kommt ihre Convergenz überhaupt nicht in Frage, ihr letztes Glied ist das grösste, und damit rechtfertigt sich das Fortlassen der Glieder höherer Grade in der Entwicklung der Störungsfunktion gegen die entsprechenden exargumentalen.

Wenn wir das eben Gesagte bedenken, so können wir für den absoluten Betrag von R, allerdings nur mit Berücksichtigung der grössten Glieder, wie folgt, schreiben:

314) $$\text{pars}|R| = \sum_1^\infty \frac{b_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} x^{n-1}.$$

Es sind dies dieselben Glieder, die in 312) auftreten, indessen müssen sie hier sämmtlich positiv genommen werden, so dass die b_n positive Constanten von der Ordnung Eins sind. Die Convergenz der Reihe 314) ist zu untersuchen.

Hierzu wollen wir die Relation zwischen δ_1 und δ entwickeln, d. h. die Relation 265):

$$\delta_1 = \delta - 2\mu\gamma.$$

γ ist der constante Teil der Funktion $\frac{dW}{dv}$ soweit er nicht rein erster Ordnung ist. Der Hauptteil von γ entsteht also aus dem Gliede $3R^2$ in der Gleichung 185), und man findet demnach, wenn man die Reihe 314) bedenkt, für γ im Wesentlichen eine Reihe folgender Art:

315) $$\gamma = \sum_1^\infty \frac{c_n m^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} x^{2n-2},$$

wonach

315a) $$\delta_1 = \delta - 2\mu \sum \frac{c_n m^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} x^{2n-2}.$$

Diese beiden Gleichungen sind wieder ein Specialfall der Gleichungen 26) und 27) in den Astronomischen Nachrichten No. 3346; die c_n sind Grössen von derselben Ordnung wie die a_n und b_n, aber stets positiv.

Aus der Gleichung 315a) folgt aber für jeden beliebigen Wert von δ, die Null eingeschlossen, ein solcher Wert von δ_1^2, für den alle hier angeführten Reihen, also auch 314) und 312) unbedingt convergiren, und man sieht unmittelbar, dass δ_1 nicht beliebig klein werden kann, dass sich also im Systeme der kleinen Planeten Lücken zeigen müssen, die sich um die Commensurabilitätsstellen gruppiren.

Hiermit ist die Brauchbarkeit unserer Integrationsmethode bewiesen für jeden möglichen Wert der mittleren Bewegung, natürlich unter der Voraussetzung der in der Einleitung hervorgehobenen Bedingungen. Wie stark die numerische Convergenz der ersten Glieder der Reihe 312) und der analogen ist, lässt sich freilich nicht ohne Weiteres sagen; es scheint, als ob es kritische Planeten geben könnne, für welche sie ziemlich weit fortgesetzt werden müssen. Man kann übrigens aus dem Vorhergehenden schliessen, dass für die charakteristischen Planeten der ersten Klasse δ_1 jedenfalls nicht unter die Grenze $\sqrt{m\varkappa}$ sinken kann.

Achtes Kapitel.

Ueber die bei den Rechnungen zu beobachtende Genauigkeit und über die Bedeutung der elementaren Glieder für die Praxis, sowie über ihre Darstellung in secularer Form.

1. Wir wollen uns jetzt Rechenschaft darüber geben, bis zu welchem Betrage wir Störungsglieder vernachlässigen können, wenn wir die Coordinaten des gestörten Körpers innerhalb der gewünschten Genauigkeitsgrenze darstellen wollen. Sei ε' eine kleine Grösse, welche die ungefähre obere Grenze bedeuten soll, bis zu welcher Fehler in der Darstellung der geocentrischen Coordinaten gestattet sein sollen, so haben wir die Bedingungen

$$\cos\delta\, d\alpha < \varepsilon', \qquad d\delta < \varepsilon'$$

zu erfüllen, wo α und δ die geocentrische Rectascension und Declination bezeichnen und unter $d\alpha$ und $d\delta$ natürlich die absoluten Beträge dieser Grössen zu verstehen sind. Da nun aber

$$\cos\delta\frac{\partial\alpha}{dr} \leqq \frac{1}{\varDelta}, \qquad \cos\delta\frac{\partial\alpha}{dv} \leqq \frac{r}{\varDelta}, \qquad \cos\delta\frac{\partial\alpha}{d\mathfrak{z}} < \frac{r}{\varDelta},$$
$$\frac{\partial\delta}{dr} < \frac{1}{\varDelta}, \qquad \frac{\partial\delta}{dv} < \frac{r}{\varDelta}, \qquad \frac{\partial\delta}{d\mathfrak{z}} \leqq \frac{r}{\varDelta},$$

wo r, v und $\mathfrak{z}$, wie im Vorigen, Radiusvektor, Länge in der Bahn und Sinus der Breite des Planeten, sowie $\varDelta$ sein Abstand von der Erde ist; und da ferner mit Vernachlässigung der Excentricität (Gleichung 2)



$$d\varrho = \frac{dr}{r},$$

so erhalten wir die Bedingungen

$$\frac{r}{\varDelta} d\varrho < \varepsilon', \qquad \frac{r}{\varDelta} dv < \varepsilon', \qquad \frac{r}{\varDelta} d\mathfrak{z} < \varepsilon'.$$

Indem wir wieder die Excentricitäten vernachlässigen, können wir a für r setzen und als Minimum von $\varDelta$ den Wert $a-1$ annehmen. Bezeichnet dann ε den Betrag, bis zu welchem die Funktionen ϱ, v (also auch W) und $\mathfrak{z}$ von ihren wahren Werten abweichen resp. abweichen dürfen, so ist

$$\varepsilon = \frac{a-1}{a} \varepsilon'.$$

In der folgenden kleinen Tabelle gebe ich für n und a als Argumente den Wert von $\frac{a-1}{a}$, sowie den Betrag von ε in Bogenmaass und von $\log \varepsilon$ in absolutem Maass, wenn ε' gleich einer Bogenminute angenommen wird:

Tabelle III.

n	$\log a$	$\log \frac{a-1}{a}$	für $\varepsilon' = 1'$	
			$\log \varepsilon$	ε
400″	0.632	9.88	6.34	45″
600″	0.515	9.84	6.30	41″
800″	0.431	9.80	6.26	37″
1000″	0.367	9.76	6.22	34″
1200″	0.314	9.72	6.18	31″

Den Werten der dritten und vierten Columne ist selbstverständlich -10 hinzuzufügen.

Diese Tafel ist sehr lehrreich: sie zeigt namentlich, dass die absolute Bahn, welche von der wahren nur um Beträge von der störenden Masse abweicht, nicht ausreichend ist, um die Coordinaten der Planeten innerhalb einer Bogenminute darzustellen. Dies ist der Grund, warum ich auf die Entwicklungen des sechsten Kapitels für die gewöhnlichen Glieder einen gewissen Wert gelegt habe. Es wird sich gleich zeigen, dass ihre Berücksichtigung in praktischer Hinsicht wichtiger ist als die der elementaren Glieder.

Wenn wir in den Funktionen ϱ, W und $\mathfrak{z}$ alle Störungsglieder fortlassen, deren absoluter Betrag kleiner als ε ist, so können wir natürlich nicht erwarten, dass die Fehler $d\varrho$, dv und $d\mathfrak{z}$ auch unterhalb dieser Grösse bleiben. Es lässt sich überhaupt nicht leicht ein Schluss ziehen, bis zu welcher Grösse man Störungsglieder fortlassen kann, wenn man ε' einen gewissen Betrag erteilt; denn es wären noch weitere Untersuchungen nötig, um festzustellen, welchen Betrag

die Summe der fortgelassenen Glieder erreichen kann. Wir werden uns damit begnügen, eine gewisse Grenze für die Grösse der fortzulassenden Störungsglieder anzunehmen, welche ein gewisser Bruchteil von ε und willkürlich zu wählen ist. Wenn man die Störungsglieder fortlässt, welche kleiner als etwa $\frac{\varepsilon}{3}$ sind, so wird man erwarten dürfen, dass ε die in obiger Tabelle gegebenen Werte nicht erheblich übersteigen wird, und also die Coordinaten im Allgemeinen bis auf die gewünschte Genauigkeit von 1′ dargestellt sein werden; natürlich vorausgesetzt, dass die Bahnelemente genau genug bekannt sind; diese müssen wir eben dementsprechend bestimmen.

Es wird im Allgemeinen keine Schwierigkeit machen, die gewöhnlichen Glieder innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze zu berechnen, und es wird auch gerechtfertigt sein, wenn wir die Saturnsstörungen bei Seite lassen, da sie in der Regel unterhalb dieser Grenze liegen.

2. Indessen würde die Auswertung der elementaren Glieder mit der gleichen Schärfe so gut wie unausführbar sein, und es würde auch den Zwecken der praktischen Rechnung durchaus nicht entsprechen, wenn man sie, absolut genommen, ebenso genau berechnen wollte, wie die gewöhnlichen; denn sie ändern ihre Werte mit der Zeit so langsam, dass sie zum grössten Teile mit den Integrationsconstanten vereinigt, d. h. bei der Rechnung fortgelassen werden können.

Betrachten wir zunächst die elementaren Glieder in der Funktion ϱ, und nehmen wir an:

$$316)\quad (\varrho) = \varkappa_a \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma_a] + \Sigma\varkappa_n \cos[(1-\varsigma_n)v - \Gamma_n] + \Sigma\varkappa_r \cos[(1-\varsigma_r)v - \Gamma_r]$$

sei der strenge[1]) Ausdruck von (ϱ), sowie $\varkappa_a$ und Γ_a die wahren Werte der beiden Integrationsconstanten, also dieselben Grössen, welche Gyldén „absolute Elemente" nennt. Die $\varkappa_n$ seien diejenigen der $\varkappa$-Coefficienten, welche bei der Störungsrechnung berücksichtigt worden sind resp. berücksichtigt werden müssen und die $\varkappa_r$ diejenigen, welche vernachlässigt werden können. Wir wollen sehen, wie gross die $\varkappa_r$ sein dürfen. Wenn man die letzteren bei Seite lässt und die Resultate der Rechnung mit den Beobachtungen vergleicht, so wird man bei der Elementenbestimmung offenbar nicht die wahren Werte von $\varkappa_a$ und Γ_a finden; ich will vielmehr die aus den Beobachtungen bestimmten Werte dieser Constanten mit $\varkappa$ und Γ bezeichnen, so dass der aus der Rechnung resultirende Wert von (ϱ) der folgende ist:

$$(\varrho) = \varkappa \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma] + \Sigma\varkappa_n \cos[(1-\varsigma_n)v - \Gamma_n].$$

1) Dies gilt eigentlich nur, wenn die Summen rechter Hand convergiren; ist dies nicht der Fall, so ist 316) nur ein genäherter Ausdruck, jedenfalls aber ein so weit genäherter, wie es mit Rücksicht auf unsere Aufgabe erforderlich ist. Ueber die absoluten Beträge der $\varkappa_r$ brauchen wir keine Voraussetzung zu machen.



Von letzterem nehme ich an, dass er um $\Delta\varrho$ fehlerhaft ist und erhalte dann aus der Vergleichung mit obigem strengen Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Delta\varrho &= \varkappa_a \cos[(1-\varsigma)v-\Gamma_a]-\varkappa\cos[(1-\varsigma)v-\Gamma]+\Sigma\varkappa_r\cos[(1-\varsigma_r)v-\Gamma_r]\\ &= \cos(1-\varsigma)v\{\varkappa_a\cos\Gamma_a-\varkappa\cos\Gamma+\Sigma\varkappa_r\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v+\Gamma_r]\}\\ &\quad+\sin(1-\varsigma)v\{\varkappa_a\sin\Gamma_a-\varkappa\sin\Gamma+\Sigma\varkappa_r\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v+\Gamma_r]\}.\end{aligned}$$

Sei nun v_0 derjenige Wert, den die Länge v in der Mitte des Zeitraums annimmt, auf den man die Rechnungen ausdehnen will; es darf nicht vergessen werden, dass wir hier v nicht wie in der elliptischen Theorie in Perioden von 360^0 zählen dürfen, sondern von $-\infty$ bis $+\infty$, da es an Stelle von t als unabhängige Veränderliche auftritt. In der Regel wird man es so einrichten, dass v_0 möglichst nahe der Null liegt, dass man also in der ersten Hälfte des in Betracht kommenden Zeitraums mit negativem v operirt.

Wir können nun in den Klammern der vorigen Gleichung die Glieder, welche $(\varsigma_r-\varsigma)v$ im Argument enthalten, nach Potenzen von $(\varsigma_r-\varsigma)(v-v_0)$ entwickeln und schon die zweiten Potenzen dieser Grössen fortlassen, da sie während eines Zeitraums von 100 Jahren sehr klein bleiben. Dann wird:

$$\begin{aligned}\Delta\varrho &= \cos(1-\varsigma)v\{\varkappa_a\cos\Gamma_a-\varkappa\cos\Gamma+\Sigma\varkappa_r\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]-\Sigma(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0)\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]\}\\ &\quad+\sin(1-\varsigma)v\{\varkappa_a\sin\Gamma_a-\varkappa\sin\Gamma+\Sigma\varkappa_r\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]+\Sigma(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0)\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]\}.\end{aligned} \tag{317}$$

Die ersten drei Glieder in den Klammern sind Constanten, und da man die Bestimmung der Constanten aus den Beobachtungen naturgemäss so vornimmt, dass die letzteren möglichst gut dargestellt werden, so erhalten $\varkappa$ und Γ offenbar die Werte, welche durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varkappa\cos\Gamma &= \varkappa_a\cos\Gamma_a+\Sigma\varkappa_r\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]\\ \varkappa\sin\Gamma &= \varkappa_a\sin\Gamma_a+\Sigma\varkappa_r\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]\end{aligned} \tag{318}$$

definirt sind, und der Fehler in (ϱ) wird folgenden Wert haben:

$$\Delta\varrho = \Sigma(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0)\sin[(1-\varsigma_r)v-(\varsigma_r-\varsigma)v_0-\Gamma_r]. \tag{318a}$$

Dieser Betrag soll nun nach dem Vorigen kleiner als ε sein. Wie bei den gewöhnlichen Gliedern, so wird es auch hier schwierig sein, sich einen Begriff von der Summe der Reihe in voriger Gleichung zu machen, und wir stellen wieder die Bedingung auf, dass jedes einzelne vernachlässigte Glied kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ sein soll. Wir haben also die Bedingung

$$(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0)<\frac{\varepsilon}{3}$$

zu erfüllen.



Sei nun

$$\text{pars}\left\{\frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho\right\} = b_r \cos[(1-\varsigma_r)v-\Gamma_r]$$

ein Glied in der Differentialgleichung für (ϱ), aus dem ein Glied mit dem Coefficienten $\varkappa_r$ in (ϱ) entsteht, so ist nach den Ausführungen pag. 101

$$\varkappa_r = \frac{b_r}{2(\varsigma_r-\varsigma)},$$

und die obige Bedingung geht in die folgende über:

$$b_r < \frac{2\varepsilon}{3(v-v_0)}.$$

Bezeichne ich

$$\varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon}{v-v_0}, \tag{319}$$

so ist also $\frac{\varepsilon_1}{3}$ die Grenze, bis zu welcher Störungsglieder von der Form B in der **Differentialgleichung** für ϱ mitzunehmen sind. Wir können hier unbedenklich $v-v_0 = n(t-t_0)$ setzen, wo t_0 die Mitte des betrachteten Zeitraums, also im Maximum $t-t_0 = \pm 50$ Jahre anzunehmen ist. Die folgende Tabelle giebt für n als Argument die Werte von ε_1, wenn ε die in Tabelle III gegebenen Werte hat; $t-t_0$ ist auf 50 Jahre berechnet, $n(t-t_0)$ in Graden und $\log n(t-t_0)$ in absoluter Zahl angegeben.

Tabelle IV.

n	$n(t-t_0)$	$\log n(t-t_0)$	für $\varepsilon' = 1'$ $\log \varepsilon_1$
400″	2030°	1.549	5.09–10
600″	3040°	1.725	4.88–10
800″	4060°	1.850	4.71–10
1000″	5070°	1.947	4.57–10
1200″	6090°	2.026	4.45–10

Die b_r sind vom ersten, dritten u. s. w., überhaupt immer von einem ungeraden Grade (siehe pag. 120) und ausserdem mit irgend einer Potenz der störenden Masse multiplicirt; aus dem Gesagten geht also hervor, dass die elementaren Glieder ersten Grades fortgelassen werden können, wenn sie in der Differentialgleichung für ϱ rein zweiter Ordnung sind, und dass die Glieder dritten Grades im Allgemeinen schon fortgelassen werden können, wenn sie dort rein erster Ordnung sind, d. h. bei allen Planeten mit Ausnahme der kritischen, und auch

hier wären nur die exargumentalen Glieder zu berücksichtigen. Bei sehr grossen Excentricitäten wird man eventuell noch das eine oder das andere Glied dritten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion mit Vorteil mitnehmen; darauf will ich aber hier nicht eingehen. Die obige Tafel zeigt, wie weit man in jedem einzelnen Falle mit der Genauigkeit zu gehen hat.

Auch über die Bestimmung der Grösse ς müssen wir einige Bemerkungen machen, um zu sehen, mit welcher Genauigkeit ihre Kenntniss erforderlich ist. Wir hätten in Gleichung 316) statt ς eigentlich auch ς_a schreiben müssen, wo ς_a den wahren Wert dieser Grösse bezeichnet; man überzeugt sich jedoch unschwer durch Untersuchungen, die den eben gemachten ganz ähnlich sind, dass wir auch bei ihrer Bestimmung in der Differentialgleichung für ρ Glieder fortlassen können, deren Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_1}{3}$ ist.

3. Es ist aber aus dem Gesagten noch eine wichtige Thatsache zu folgern, die oft nicht genügend gewürdigt wird. Nämlich bei der Berechnung der Bewegung eines Planeten während eines beschränkten Zeitraums spielen die sogenannten kleinen Integrationsdivisoren von der Ordnung der ς_n überhaupt gar keine Rolle. Es ist ganz gleichgiltig, wie klein sie sind, und wie gross der dementsprechende Coefficient $\varkappa_n$ in der Funktion (ρ) werden würde. Es kommt nur auf die Grösse der entsprechenden Glieder in der **Differentialgleichung** an, und die Brauchbarkeit unseres Integrationsverfahrens während eines beschränkten Zeitraums hängt lediglich von der Erfüllung der Bedingungen pag. 12 ab.

4. Ich habe schon in der Einleitung gesagt, dass wir uns damit begnügen können, die Bahn Jupiters als elliptisch anzusehen; dennoch habe ich für die Funktion (ρ') den vollständigen Ausdruck

$$(\rho') = \Sigma\varkappa_n' \cos\left[(1-\varsigma_n')v' - \Gamma_n'\right]$$

eingeführt. Ich habe dies lediglich gethan, um meinen Ausführungen eine grössere Allgemeinheit zu geben, und um zu erreichen, dass die in dieser Abhandlung gemachten Untersuchungen auch bei eingehenderen Arbeiten als Ausgangspunkt dienen können.

Für unsere gegenwärtigen Zwecke können wir den Ausdruck kürzen, indem wir den elliptischen dafür setzen und einfach schreiben:

$$(\rho') = \eta' \cos(v' - \Pi'),$$

wo η' und Π' als constant anzusehen sind.

Da es von Interesse ist, zu sehen, wie gross der Fehler sein kann, der dadurch in unseren Rechnungen entsteht, so wollen wir ihn feststellen durch eine Betrachtung, die der Obigen ganz analog ist. Nach Gyldén ist (ρ') im Wesentlichen durch den Ausdruck



320) $$(\varrho') = \varkappa' \cos[(1-\varsigma')v' - \Gamma'] + \varkappa_2' \cos[(1-\varsigma_2')v' - \Gamma_2'] + \varkappa_3' \cos[(1-\varsigma_3')v' - \Gamma_3']$$

gegeben, wo $\varkappa'$ und Γ' die Integrationsconstanten für Jupiter sind, und wo das Glied mit dem Faktor $\varkappa_2'$ von der Einwirkung Saturns und das folgende von der Einwirkung des Uranus herrührt. $\varkappa_2'$ enthält also als Faktor den Excentricitätsmodul Saturns und $\varkappa_3'$ den des Uranus. Die Glieder dritten Grades sind hier bei Seite gelassen, und die numerischen Werte sind nach Gyldén:

$$\left.\begin{array}{lll} \log\varkappa' = 8.6252_{-10} & \log\varsigma' = 5.5175_{-10} & \Gamma' = 27^0.49 \\ -\varkappa_2' = 8.1777_n{}_{-10} & -\varsigma_2' = 6.4021_{-10} & \Gamma_2' = 132^0.14 \\ -\varkappa_3' = 7.2242_{-10} & -\varsigma_3' = 5.3673_{-10} & \Gamma_3' = 101^0.16. \end{array}\right\} 1850.0$$

Die Differenz dieser Werte gegen die Leverrier'schen ist für uns natürlich ganz bedeutungslos. Es darf nicht vergessen werden, dass stets angegeben werden muss, von welcher Epoche an v' in der obigen Gleichung gezählt ist, da davon die Werte der Γ_n' abhängen; es ist bei den Gyldén'schen Werten, wenn ich nicht irre, so gezählt, dass es zu Anfang des Jahres 1850 zwischen 0^0 und 360^0 liegt. In Analogie mit der für ϱ gegebenen Entwicklung (Gleichung 317) haben wir also zu setzen:

$$\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \Pi' = \varkappa' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \Gamma' + \varkappa_2' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} [(\varsigma_2' - \varsigma')v_0' + \Gamma_2'] + \varkappa_3' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} [(\varsigma_3' - \varsigma')v_0' + \Gamma_3'],$$

wo v_0' der Wert ist, den v' in der Mitte des Zeitraums erreicht, für den unsere Rechnung gelten soll. Da die gegenwärtigen Berechnungen der kleinen Planeten sich auf Jahrhundert 1850—1950 beziehen werden, so wird es sich empfehlen, v' vom Januar 1904 ab zu zählen, in welchem Monat die mittlere Länge Jupiters durch den Nullwert hindurch geht; mit Rücksicht darauf müssten die obigen Werte der Γ_n' reducirt werden und ebenso wird man sie auf das mittlere Aequinoctium 1900.0 beziehen. Ich unterlasse indessen hier diese Reduction, da ich im zweiten Teile doch noch auf die numerischen Grundlagen unserer Rechnungen zurückkommen muss. Die numerische Rechnung ergiebt nun für die Epoche 1850, wenn v_0' klein ist:

$$\begin{array}{ll} \log\eta'\cos\Pi' = 8.6740_{-10} & \log\eta' = 8.6834_{-10} \\ -\eta'\sin\Pi' = 7.9981_{-10} & \Pi' = 11^0.91 \quad (1850.0), \end{array}$$

fast genau übereinstimmend mit Leverrier's Werten.

Der Fehler, den wir infolge der genannten Kürzung in ϱ' begehen, ist also (vgl. Gleichung 317) und 318) nahezu:

$$\begin{aligned} \varDelta\varrho' = {} & \cos(1-\varsigma')v'\{(\varsigma'-\varsigma_2')(v'-v_0')\varkappa_2'\sin\Gamma_2' + (\varsigma'-\varsigma_3')(v'-v_0')\varkappa_3'\sin\Gamma_3'\} \\ & -\sin(1-\varsigma')v'\{(\varsigma'-\varsigma_2')(v'-v_0')\varkappa_2'\cos\Gamma_2' + (\varsigma'-\varsigma_3')(v'-v_0')\varkappa_3'\cos\Gamma_3'\}. \end{aligned}$$



Wenn ich also für den Augenblick bezeichne:

$$\left.\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right\} = (\varsigma' - \varsigma_2')\varkappa_2' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \Gamma_2' + (\varsigma' - \varsigma_3')\varkappa_3' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \Gamma_3',$$

so wird

$$\varDelta\varrho' = c_1(v' - v_0')\cos(1-\varsigma')v' - c_2(v' - v_0')\sin(1-\varsigma')v',$$

und der absolute Betrag von $\varDelta\varrho'$ ist:

$$|\varDelta\varrho'| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\,(v' - v_0'),$$

d. h. mit Annahme der numerischen Werte

$$|\varDelta\varrho'| = [4.521{-}10]\,(v' - v_0').$$

Da $v' - v_0'$ in 50 Jahren den Maximalbetrag von ungefähr 1520° erreicht, so wird also:

$$\log|\varDelta\varrho'| = 5.944{-}10$$

werden können.

Ein Blick auf die Tabelle III in diesem Kapitel zeigt, dass demnach der geocentrische Ort Jupiters kaum um 1′ geändert wird, und dass der Einfluss unserer Kürzung auf die Bewegung der kleinen Planeten für unsere Zwecke ganz verschwindend ist; denn das aus $\varDelta\varrho'$ entspringende Glied auf der rechten Seite der Differentialgleichung für ϱ wird nach § 3 des sechsten Kapitels nur den Betrag $b_2\varDelta\varrho'$ haben. Es ist ja auch von vornherein selbstverständlich, dass die direkten Saturnstörungen grösser sein müssen.

5. In bezug auf die Funktion $\mathfrak{z}$ lassen sich genau dieselben Betrachtungen anstellen: wir werden auf der rechten Seite der Differentialgleichung für $(\mathfrak{z})$ ebenfalls Glieder fortlassen können, deren absoluter Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_1}{3}$ ist und wir setzen für Jupiter:

$$(\mathfrak{z}') = \sin j' \sin(v' - \sigma'),$$

und sehen j' und σ' als Constanten an, nämlich als die mittleren Werte der Neigung und der Knotenlänge in der Mitte des in Frage kommenden Zeitraums.

6. Ich gehe nun zur Betrachtung der Glieder der Form A über. Dieselben treten in erster Linie in der Funktion W auf, und über sie habe ich bereits einige Bemerkungen in den Astronomischen Nachrichten No. 3315 gemacht. Wir wollen annehmen, dass der vernachlässigte resp. zu vernachlässigende Teil von W, der die Form A hat, durch die Gleichung:

$$W_a = \Sigma f_\nu \sin(\sigma_\nu v + A_\nu)$$

dargestellt ist. Auch diese Gleichung können wir, wie 316). eigentlich nur aufstellen, wenn ihre rechte Seite convergirt, was erst zu beweisen wäre; immerhin können wir annehmen, dass sie, wie 316), genähert gilt; über den Betrag der f_r machen wir keine Voraussetzung, sie können sehr gross sein. Wenn wir den letzteren Ausdruck wieder nach Potenzen von $v - v_0$ entwickeln, so wird:

$$321)\quad W_a = \Sigma f_r \sin(\sigma_r v_0 + A_r) + \Sigma \sigma_r f_r (v - v_0) \cos(\sigma_r v_0 + A_r) - \tfrac{1}{2} \Sigma \sigma_r^2 f_r (v - v_0)^2 \sin(\sigma_r v_0 + A_r) \pm \cdots\cdots.$$

Da aber die Bahnelemente n und A wieder aus den Beobachtungen bestimmt werden, so ist der Fehler, der sich in W (also auch in v) zeigen wird, nicht gleich dem ganzen W_a; vielmehr wird der constante Teil in die Constante A und der Teil, der proportional v ist, in die mittlere Bewegung eingehen, so dass der Fehler, der sich in v zeigen wird, ist:

$$\Delta v = \tfrac{1}{2} (v - v_0)^2 \Sigma \sigma_r^2 f_r \sin(\sigma_r v_0 + A_r) \pm \cdots\cdots.$$

Δv soll nun kleiner als ε sein, so dass wir, da $\sigma_r (v - v_0)$ klein ist, die Bedingung

$$\frac{(v - v_0)^2}{2} \Sigma \sigma_r^2 f_r < \varepsilon$$

zu erfüllen haben. Ich bezeichne jetzt:

$$322)\quad \varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon}{(v - v_0)^2} = \frac{\varepsilon_1}{v - v_0},$$

wo wir wieder $v - v_0$ durch $n(t - t_0)$ ersetzen können und ich gebe in der folgenden Tabelle den Wert von ε_2 für n als Argument, wobei ich wieder $t - t_0$ zu 50 Jahren annehme:

Tabelle V.

n	für $\varepsilon' = 1'$. $\log \varepsilon_2$
400″	3.54–10
600″	3.15–10
800″	2.86–10
1000″	2.62–10
1200″	2.42–10

Wir können dann in W die Glieder fortlassen, deren absoluter Betrag

$$|f_r| < \frac{\varepsilon_2}{3\sigma_r^2}$$

ist. Wenn wir setzen

$$323)\quad \frac{dW_a}{dv} = \Sigma \gamma_r \cos(\sigma_r v + A_r),$$

so ist offenbar nach Kapitel VI

$$\gamma_r = \sigma_r f_r,$$

und unsere Bedingung geht über in

$$324) \qquad \sigma_r \gamma_r < \frac{\varepsilon_2}{3}.$$

Wir können also in der Differentialgleichung für W im Allgemeinen die Glieder vernachlässigen, deren Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{3\sigma_r}$ ist, und hieraus kann man schon schliessen, dass die Glieder rein erster Ordnung der Form A in $\frac{dW}{dv}$ fortzulassen sind, denn sie sind sämmtlich noch mit dem Quadrat des Excentricitätsmoduls multiplicirt.

Wir müssen aber besonders achten auf diejenigen Glieder der Form A in W, die dort durch die Funktion S eingeführt werden. In bezug auf diesen Teil ist nach Gleichung 59)

$$\text{pars}\frac{dW_a}{dv} = S_a - 2R_a,$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung 251b):

$$\text{pars}\frac{dW_a}{dv} = -3S_a,$$

wenn S_a und R_a die entsprechenden vernachlässigten Teile dieser Funktionen bedeuten. Nach 323) ist also:

$$S_a = -\tfrac{1}{3}\Sigma\gamma_r \cos(\sigma_r v + A_r).$$

Ist nun der vernachlässigte Teil von S in der Differentialgleichung für diese Funktion:

$$\frac{dS_a}{dv} = \Sigma a_r \sin(\sigma_r v + A_r),$$

so ist zu setzen:

$$\sigma_r \gamma_r = 3a_r,$$

und die Bedingung

$$325) \qquad a_r < \frac{\varepsilon_2}{9}$$

bleibt zu erfüllen. Wir können in der Differentialgleichung für S also alle Glieder der Form A fortlassen, deren absoluter Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{9}$ ist. Die ς_r sind aus

unserer Bedingungsgleichung ebenso gänzlich verschwunden, wie es oben bei den Auseinandersetzungen für die Funktion ϱ der Fall war; wir haben wieder einen direkten Ueberblick, wie weit wir bei Aufstellung der Differentialgleichungen für S und W gehen müssen, um die Glieder der Form A mit genügender Schärfe zu finden; wie gross ihre Coefficienten f_r in der Funktion W sind, ist dabei von gar keinem Einfluss. Freilich scheint die Grenze $\frac{\varepsilon_2}{9}$ etwas niedrig zu sein; indessen sind diese Glieder mindestens zweiten Grades und bei der numerischen Rechnung gewinnt man die Ueberzeugung, dass die Glieder rein zweiter Ordnung in $\frac{dS}{dv}$ fast durchgängig unter dieser Grenze liegen, womit also gezeigt ist, dass die elementaren Glieder in W für die Praxis von untergeordneter Bedeutung sind.

In jedem einzelnen Falle hat man an den oben gegebenen Werten von ε, ε_1 und ε_2 einen Maassstab wie weit die numerische Genauigkeit zu treiben ist.

7. Die Hauptschwierigkeit macht es natürlich, die charakteristischen Glieder mit der erforderlichen Schärfe zu berechnen. Zunächst will ich einige Worte sagen über die charakteristischen Planeten der höheren Klassen, zu denen, streng genommen, jeder Planet gehört. Es ist einleuchtend, dass die charakteristischen Glieder der höheren Klassen nur dann merklich werden, wenn der Divisor δ_1 ausserordentlich klein ist, wenn also die Perioden dieser Glieder mit denen der elementaren auf eine Stufe zu stellen sind, und in diesem Falle gilt das eben für die elementaren Glieder Gesagte auch hier. Ob die charakteristischen Glieder höherer Klassen während eines beschränkten Zeitraums für die praktische Störungsrechnung merklich werden, hängt nicht von ihrem absoluten Betrage ab, sondern vom Betrage der ihnen entsprechenden Glieder in den **Differentialgleichungen** und da diese sicher sehr klein sind, so werden auch sie fortzulassen sein.

Die charakteristischen Glieder der niederen Klassen sind indessen mit derselben Schärfe zu berechnen, wie die gewöhnlichen, d. h. bis zum Betrage $\frac{\varepsilon}{3}$.

Es bleibt nun noch die eine wichtige Frage zu beantworten, welche Klassen von charakteristischen Planeten zu den höheren und welche zu den niederen Klassen zu zählen sind. Diese Grenze ist nicht leicht zu ziehen; sie bestimmt sich durch die Genauigkeit, mit der man die Beobachtungen während eines gewissen Zeitraums darstellen will. Ich habe die Glieder dritten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion vernachlässigt und damit eigentlich schon die charakteristischen Planeten der dritten Klasse zu den höheren gezählt. Ob dies gerechtfertigt ist, ist zweifelhaft und kann sich erst bei Ausführung einiger weiteren Rechnungen zeigen. Sollte es nicht der Fall sein, so ist man freilich gezwungen, für diese Planeten einige Glieder dritten und eventuell vierten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion zu berücksichtigen. Es werden

dies aber in allen Fällen nur wenige Glieder sein, und es erschien nicht lohnend, deswegen in der gegenwärtigen Arbeit die Entwicklungen über die Glieder zweiten Grades hinaus fortzusetzen. Wenn also auch für die äusserst wenigen Planeten, welche diesen Klassen angehören, unsere Formeln vielleicht nicht vollständig ausreichen, um ihre Coordinaten innerhalb 1′ darzustellen, so ist es doch nicht schwierig, behufs genauerer Berechnung die wenigen nötigen Glieder höheren Grades hinzuzufügen.

8. Ich will nun noch einige Worte sagen über die Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form, namentlich, um festzustellen, welche der beiden Darstellungsarten die vorteilhaftere sein dürfte. Ich habe schon pag. 85 einige Bemerkungen über diese Frage gemacht. Kürzen wir die Ausdrücke der elementaren Glieder in der Weise, dass wir die Bewegung Jupiters als elliptisch annehmen, so sind die Funktionen η und Π durch die Relationen:

$$\eta \cos \Pi = \varkappa \cos (\varsigma v + \Gamma) + \varkappa_1 \cos \Gamma_1$$
$$\eta \sin \Pi = \varkappa \sin (\varsigma v + \Gamma) + \varkappa_1 \sin \Gamma_1 ,$$

ausgedrückt, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen. Die seculare Form ist sehr einfach hieraus herzustellen; es wird:

$$\eta \cos \Pi = \varkappa \cos (\varsigma v_0 + \Gamma) + \varkappa_1 \cos \Gamma_1 v - \varsigma\varkappa (v - v_0) \sin (\varsigma v_0 + \Gamma) - \frac{\varsigma^2 \varkappa}{2} (v - v_0)^2 \cos (\varsigma v_0 + \Gamma) \pm \cdots\cdots$$

$$\eta \sin \Pi = \varkappa \sin (\varsigma v_0 + \Gamma) + \varkappa_1 \sin \Gamma_1 + \varsigma\varkappa (v - v_0) \cos (\varsigma v_0 + \Gamma) - \frac{\varsigma^2 \varkappa}{2} (v - v_0)^2 \sin (\varsigma v_0 + \Gamma) \pm \cdots\cdots ,$$

wo man, wenn man will, auch die Zeit als unabhängige Veränderliche einführen kann. Das mit dem Quadrat von v multiplicirte Glied erreicht allerdings in einem Zeitraum von 100 Jahren nicht den von uns als Genauigkeitsgrenze angenommenen Betrag, kann also bei Seite gelassen werden.

Wie sich die Integrationen des sechsten und siebenten Kapitels stellen werden, wenn man die elementaren Glieder in secularer Form giebt, ist ohne Schwierigkeit einzusehen, und gerade hier bietet die Darstellung in periodischer Form einen Vorteil.

Auch die Glieder der Form A in der Funktion W stellen sich in ihrer periodischen Form so einfach dar, dass ich dieser letzteren entschieden den Vorzug geben möchte; es wird nämlich:

$$\eta^2 = \varkappa^2 + \varkappa_1^2 + 2\varkappa\varkappa_1 \cos (\varsigma v + \Gamma - \Gamma_1)$$
$$\eta\eta' \cos (\Pi - \Pi_1) = \varkappa_1 \varkappa' + \varkappa\varkappa' \cos (\varsigma v + \Gamma - \Gamma_1)$$
$$\eta'^2 = \varkappa'^2 .$$

Demnach tritt hier ausser den constanten Gliedern überhaupt nur ein einziges Argument auf, und die Rechnung kann auch durch das Auftreten aussergewöhnlich kleiner Divisoren nicht erschwert werden. Will man die Glieder dennoch in secularer Form darstellen, so wird auch dies keine Schwierigkeiten machen. Sie sind hier um einen Grad kleiner als in ϱ; indessen sind sie in der Funktion W numerisch in vielen Fällen grösser, namentlich wenn es sich um charakteristische Planeten handelt, so dass dann das mit v^2 multiplicirte Glied berücksichtigt werden muss; und nur dieses, da die vorhergehenden sich mit den Integrationsconstanten vereinigen.

Dies sind die Gründe, die mich bewogen haben, die sogenannten Secularstörungen in periodischer Form zu geben.

Greifswald 1897, November. Martin Brendel.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Die Grundprincipien der Gyldén'schen Störungstheorie. — Die allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale. — Die Gyldén'schen Coordinaten ρ, η und S.

Zweites Kapitel.

Ableitung der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten. — Formeln für die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene.



Drittes Kapitel.

Formeln für die heliocentrische Bewegung des Planeten. — Lage der momentanen Bahnebene zu der als Fundamentalebene gewählten Ekliptik.

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Störungsfunktion Ω und ihrer partiellen Ableitungen Q, P, und Z.

Fünftes Kapitel.

Transformation der für die Funktionen Q, P und Z gefundenen Ausdrücke.

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten. — Die gewöhnlichen Planeten.



Siebentes Kapitel.

Die charakteristischen Planeten.



